Вестник

Российско-Армянского (Славянского) университета

№1

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ISSN 1829-0450

ЕРЕВАН 2015

РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ

В Е С Т Н И К

РОССИЙСКО-АРМЯНСКОГО (СЛАВЯНСКОГО) УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ:

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

№1

Издательство РАУ

Ереван 2015

ՀԱՅ-ՌՈՒՍԱԿԱՆ (ՍԼԱՎՈՆԱԿԱՆ)
ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Լ Ր Ա Բ Ե Ր

ՀԱՅ-ՌՈՒՍԱԿԱՆ (ՍԼԱՎՈՆԱԿԱՆ)

ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ

ՍԵՐԻԱ
ՖԻԶԻԿԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ

ԵՎ ԲՆԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

№ 1

ՀՌՀ Հրատարակչություն

Երևան 2015

Печатается по решению Ученого совета РАУ

Вестник РАУ, № 1. – Ер.: Изд-во РАУ, 2015. – 123 с.

Журнал входит в перечень периодических изданий, зарегистрированных ВАК РА

Российско-Армянский (Славянский) университет, 2015 г.

ISBN 1829-0450

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 517.968.22+517.968.4 Поступила 03.06.2015г.

СУММИРУЕМОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА-ВОЛЬТЕРРА НА ПОЛУОСИ

Т.Г. Сардарян

Институт математики НАН РА,
Республика Армения, Ереван, 0019, пр. Маршала Баграмяна, 24/5
e-mail: Sardaryan.tigran@gmail.com

АННОТАЦИЯ

В настоящей статье исследуется вопрос положительной разрешимости для одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна-Вольтерра на полуоси. Доказывается существование положительного и суммируемого решения этого уравнения.

Ключевые слова: уравнения типа Гаммерштейна-Вольтерра, факторизация, условие Каратеодори, монотонность, итерации.

1. Введение и основной результат

Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна-Вольтерра:

$$f(x)=\int_x^\infty V(x,t)H\big(t,f(t)\big)\,dt,\ x\in R^+\equiv[0+\infty) \tag{1}$$

относительно искомой вещественной и измеримой функции $f(x)$, определенной на R^+.

В уравнении (1) $V(x,t)$ – определенная на $R^+\times R^+$ измеримая функция, допускающая следующее представление:

$$V(x,t)=\theta(t-x)\int_a^b \alpha(t,s)e^{-\alpha(t,s)(t-x)}d\sigma(s), \tag{2}$$

где $\alpha(t,s)$ – определенная на множестве $R^+ \times [a,b), (0 \le a < b \le +\infty)$ измеримая функция, причем

$$\operatorname*{essinf}_{(t,s)\in R^+\times[a,b)} \alpha(t,s) \equiv \beta > 0, \tag{3}$$

$$\operatorname*{esssup}_{t\in R^+} \alpha(t,s) \equiv \alpha_0(s) < +\infty, \forall s \in [a,b), \tag{4}$$

$$\delta \equiv 1 - \beta \inf_{t\in R^+} \int_a^b \frac{1}{\alpha(t,s)} d\sigma(s) < 1.$$

Здесь $\sigma(s)$ – монотонно неубывающая на $[a,b)$ функция, такая что

$$\sigma(b) - \sigma(a) = \int_a^b d\sigma(s) = 1, \tag{5}$$

а $\theta(\tau)$ – функция Хевисайда, т.е.

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 1, \text{если } \tau \ge 0, \\ 0, \text{если } \tau < 0. \end{cases}$$

Уравнение (1) имеет применение в кинетической теории газов. Уравнения такого вида возникают в задаче о течении газа со скольжением вдоль плоской твердой стенки (см. [1–4]).

В случае, когда $H(t,u) \equiv u$, а функция $\alpha(t,s)$ удовлетворяет условиям:

$$\operatorname*{esssup}_{(t,s)\in R^+\times[a,b)} \alpha(t,s) < 2\beta, \quad \operatorname*{essinf}_{(t,s)\in R^+\times[a,b)} \alpha(t,s) \equiv \beta > 0,$$

уравнение (1) исследовалось в работе [5].

В случае, когда

$$H(t,u) = u - \omega(t,u),$$

где $\omega(t,u)$ определенная на $R^+ \times R$ измеримая функция, для которой

(a) существует число $A > 0$ такое, что $\omega(t,u) \ge 0$, когда $(t,u) \in R^+ \times [A,+\infty)$ и $\omega(t,u) \downarrow$ по u на $[A,+\infty)$ при каждом фиксированном $t \in R^+$,

(b) $\omega(t,u)$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу u на множестве $R^+ \times [A,+\infty)$, т.е при каждом фиксированном $u \in [A,+\infty)$ функция $\omega(t,u)$ измерима по $t \in R^+$ и почти при всех $t \in R^+$ функция $\omega(t,u)$ непрерывна по u на $[A,+\infty)$,

(c) существует неотрицательная функция $\omega^\circ \in L_1(R^+) \cap C^0(R^+), \omega^\circ \downarrow$ по z на $[A,+\infty)$, $m_1(\omega^\circ) \equiv \int_0^\infty x\omega^\circ(x)dx < \infty$ – такая, что $\omega^\circ(t+z) \ge \omega(t,z), (t,z) \in R^+ \times [A,+\infty)$, уравнение (1) было исследовано в работе [6].

В настоящей работе исследуется разрешимость этого уравнения при других ограничениях на функцию $\mathrm{H(t,u)}$.

Сначала рассмотрим следующую характеристическую функцию, определенную на R^+:

$$\chi(p) \equiv \beta c \int_a^b \frac{1}{\alpha_0(s)+p} d\sigma(s), p \in [0,+\infty),$$

где

$$c = 2\left(\int_a^b \frac{\beta}{\alpha_0(s)} d\sigma(s)\right)^{-1}. \quad (6)$$

Из (3), (4), с учетом (5), имеем:

$\chi(p) \downarrow$ по p на $[0,+\infty)$,

$\chi(0) = \beta c \int_a^b \frac{1}{\alpha_0(s)} d\sigma(s) = 2 > 1$,

$\chi(+\infty) = 0$.

Следовательно, существует единственное число $p_0 \in (0,\infty)$, такое что

$$\chi(p_0) = 1. \quad (7)$$

Зафиксируем p_0 для дальнейшего использования.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть, в уравнении (1) ядро $V(x,t)$ задается согласно формуле (2). Пусть, далее, существует суммируемая на R^+ функция $\tilde{\beta}(t)$:*

$$\tilde{\beta}(t) \geq ce^{-p_0 t}, t \in R^+$$

такая, что для функции $H(t,u)$ имеют место следующие условия:

a) $H(t,u) \leq u + \tilde{\beta}(t), u \geq e^{-p_0 t}, t \in R^+,$

$H(t, e^{-p_0 t}) \geq ce^{-p_0 t}, t \in R^+$,

где числа c и p_0 определяются согласно (6) и (7) соответственно,

b) *функция $H(t,u)$ при каждом фиксированном $t \in R^+$ монотонно возрастает по u на $[e^{-p_0 t}, +\infty)$,*

c) $H(t,u)$ *удовлетворяет условию Каратеодории по аргументу u на множестве $R^+ \times R^+$.*

Тогда уравнение (1) имеет положительное суммируемое на R^+ решение.

2. Доказательство теоремы

Рассмотрим следующее линейное неоднородное уравнение типа Вольтерра:

$$\varphi(x) = g(x) + \int_x^{\infty} V(x,t)\varphi(t)dt,\ x \geq 0, \tag{8}$$

где функция $g(x)$ задается согласно следующей формулы:

$$g(x) = \int_x^{\infty} V(x,t)\tilde{\beta}(t)dt,\ x \geq 0. \tag{9}$$

Из условий на функции $\alpha(t,s)$ и $\sigma(s)$ следует, что ядро

$$V(x,t) \geq 0, (x,t) \in R^+ \times R^+,$$

при этом

$$\sup_{t\in R^+} \int_0^{\infty} V(r,t)dr = \sup_{t\in R^+} \left[1 - \int_a^b \alpha(t,s)e^t d\sigma(s)\right] = 1 \tag{10}$$

Сначала докажем, что

$$g(x) \geq e^{-p_0 x}. \tag{11}$$

Действительно, в силу условия на функцию $\tilde{\beta}(t)$, с учетом (7), имеем

$$g(x) = \int_x^{\infty} V(x,t)\tilde{\beta}(t)dt \geq c\int_x^{\infty} V(x,t)e^{-p_0 t}\,dt =$$

$$= c\int_a^b\int_x^{\infty} \alpha(t,s)e^{-\alpha(t,s)(t-x)}\,e^{-p_0 t}dtd\sigma(s) \geq$$

$$\geq c\beta\int_a^b e^{\alpha_0(s)x}\int_x^{\infty} e^{-(\alpha_0(s)+p_0)t}\,dtd\sigma(s) =$$

$$= c\beta e^{-p_0 x}\int_a^b \frac{1}{\alpha_0(s)+p_0}d\sigma(s) = \chi(p_0)e^{-p_0 x} = e^{-p_0 x}.$$

Через $\mathfrak{M}$ обозначим класс интегральных операторов $\widehat{V}_0$ типа Вольтерра с ядром $V_0(x,t) \geq 0, (x,t) \in R^+ \times R^+$,

$$\mu(V_0) \equiv \sup_{t\in R^+} \int_x^{\infty} V_0(r,t)dr < +\infty, \tag{12}$$

задаваемый по формуле

$$\left(\widehat{V}_0 f\right)(x) = \int_x^{\infty} V_0(x,t)f(t)dt\,, x \in R^+, f \in L_1(R^+)\,. \tag{13}$$

Уравнение (8) запишем в операторном виде:

$$\left(I - \widehat{V}\right)\varphi = g, \tag{14}$$

где I – единичный оператор, а $\widehat{V}$ – итегральный оператор Вольтерра с ядром (2).

Нетрудно убедиться, что $\widehat{V} \in \mathfrak{M}$.

Покажем, что для оператора $\widehat{V}$ существует оператор $\widehat{W} \in \mathfrak{M}$ – такой, что имеет место следующая факторизация:

$$I - \widehat{V} = \left(I - \widehat{U}\right)\left(I - \widehat{W}\right), \tag{15}$$

где оператор $\widehat{U}$ определяется по формуле

$$\left(\widehat{U}f\right)(x) = \beta \int_x^{\infty} e^{-\beta(t-x)} f(t)dt\,, x \in R^+, f \in L_1(R^+). \tag{16}$$

Факторизация (15) понимается как равенство операторов, действующих в $L_1(R^+)$.

Из (15) следует, что

$$\widehat{W} = \widehat{V} - \widehat{U} + \widehat{U}\widehat{W}, \tag{17}$$

где, переходя от операторных равенств к равенству соответствующих ядер, будем иметь

$$W(x,\tau) = V(x,\tau) - U(x,\tau) + \int_x^{\tau} U(x,t)W(t,\tau)dt\,, (x,\tau) \in R^+ \times R^+. \tag{18}$$

Здесь

$$U(x,\tau) = \theta(\tau - x)\beta e^{-\beta(\tau-x)}, (x,\tau) \in R^+ \times R^+. \tag{19}$$

Прямой проверкой можно убедиться, что уравнению (18) удовлетворяет функция

$$W(x,\tau) = \theta(\tau - x) \int_a^b (\alpha(\tau,s) - \beta) e^{-\alpha(\tau,s)(\tau-x)} d\sigma(s) \tag{20}$$

причем, в силу условий на функции α (t,s), $\sigma(s)$ и из определения числа β

$$W(x,\tau) \geq 0, (x,\tau) \in R^+ \times R^+.$$

Из условий (3) и (4) следует, что для ядра $W(x,\tau)$ выполняется (12). Следовательно, $\widehat{W} \in \mathfrak{M}$.

Теперь докажем, что уравнение (18) имеет единственное решение в классе функций

$$\Omega = \{W(x,\tau) \geq 0, (x,\tau) \in R^+ \times R^+, \mu(W) < +\infty | \\ \operatorname{supp} W \subset \{(x,\tau) \in R^+ \times R^+, \tau \geq x\}\}. \quad (21)$$

Пусть, $W_1, W_2 \in \Omega$ – два разных решения уравнения (18). Тогда в силу линейности (18) их разность $\Delta W = W_1 - W_2$ будет удовлетворять соответствующему однородному уравнению:

$$\Delta W(x,\tau) = \int_x^\tau U(x,t)\Delta W(t,\tau)dt. \quad (22)$$

Так как $\mu(\Delta W) < +\infty$, то из (22), в силу определения ядра $U(x,\tau)$, будем иметь

$$\int_0^\tau |\Delta W(x,\tau)|dx \leq \\ \leq \int_0^\tau \int_x^\tau U(x,t)|\Delta W(t,\tau)|dtdx \\ = \int_0^\tau |\Delta W(t,\tau)|dt - \int_0^\tau e^{-\beta t}|\Delta W(t,\tau)|dt.$$

Откуда следует, что $\Delta W(t,\tau) = 0$ почти всюду на множестве $T \equiv \{(t,\tau), (t,\tau) \in R^+ \times R^+, t < \tau\}$.

С учетом факторизации (15) уравнение (14) можно записать в следующем виде:

$$(I - \widehat{U})(I - \widehat{W})\varphi = g. \quad (23)$$

Рассмотрим следующую связанную систему уравнений:

$$\begin{cases} (I - \widehat{U})F = g, & (24) \\ (I - \widehat{W})\varphi = F. & (25) \end{cases}$$

Уравнение (24) в раскрытой форме примет вид:

$$F(x) = g(x) + \beta \int_{x}^{\infty} e^{-\beta(t-x)} F(t)dt\,, x \geq 0. \qquad (26)$$

Нетрудно убедиться, что решением уравнения (26) является функция

$$F(x) = g(x) + \beta \int_{x}^{\infty} g(t)dt\,, x \geq 0. \qquad (27)$$

Так как $g \in L_1(0, +\infty)$, $m_1(g) < +\infty$, то $F \in L_1(R^+)$.

Для доказательства разрешимости уравнения (25) рассмотрим следующие итерации:

$$\varphi_{n+1}(x) = F(x) + \int_{x}^{\infty} W(x,t)\varphi_n(t)\,dt \qquad (28)$$

$$\varphi_0(x) \equiv F(x), n = 0,1,2, \dots .$$

Индукцией по n нетрудно убедиться, что

a) $\varphi_n(x) \uparrow$ по n,

b) $\|\varphi_n(x)\|_{L_1(R^+)} \leq \frac{\int_0^\infty F(x)dx}{1-\delta}, n = 0,1,2, \dots$, где

$$\delta = 1 - \beta \inf_{t \in R^+} \int_{a}^{b} \frac{1}{\alpha(t,s)} d\sigma(s).$$

Для этого сначала докажем, что

$$\sup_{t \geq 0} \int_{0}^{t} W(x,t)dx \leq \delta. \qquad (29)$$

Из (20), с учетом (5), имеем

$$\int_{0}^{t} W(x,t)dx = \int_{a}^{b} \int_{0}^{t} (\alpha(t,s) - \beta)e^{-\alpha(t,s)(t-x)} dx d\sigma(s) =$$

$$= \int_{a}^{b} \frac{\alpha(t,s) - \beta}{\alpha(t,s)} \left(1 - e^{-\alpha(t,s)t}\right) d\sigma(s) \leq$$

$$\leq \int_a^b \left(1-\frac{\beta}{\alpha(t,s)}\right) d\sigma(s) =$$

$$= 1-\beta\int_a^b \frac{1}{\alpha(t,s)} d\sigma(s) \leq 1-\beta \inf_{t\in R^+} \int_a^b \frac{1}{\alpha(t,s)} d\sigma(s) = \delta.$$

Монотонность функциональной последовательности $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ следует из неотрицательности $F(x)$ и $W(x,t)$.

Так как $\delta \in (0,1)$, то неравенсто b) в случае $n = 0$ непосредственно следует из определения $\varphi_0(x)$ и из неотрицательности $F(x)$.

Предполагая, что b) выполняется при некотором натуральном $n \in \mathbb{N}$, и учитывая (28), (29) в силу предположения индукции, имеем

$$\|\varphi_n(x)\|_{L_1(R^+)} = \int_0^\infty F(x)dx + \int_0^\infty\int_x^\infty W(x,t)\varphi_n(t)dt\,dx =$$

$$= \int_0^\infty F(x)dx + \int_0^\infty \varphi_n(t)\int_0^t W(x,t)dxdt \leq \int_0^\infty F(x)dx + \delta\int_0^\infty \varphi_n(t)dt \leq$$

$$\leq \left(1+\frac{\delta}{1-\delta}\right)\int_0^\infty F(x)dx = \frac{\int_0^\infty F(x)dx}{1-\delta}.$$

Таким образом, по теореме Б. Леви (см.: [7]), последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет предел, когда $n \to \infty$, и предельная функция удовлетворяет условию (25) и следующим оценкам:

$$\int_0^\infty \varphi(x)dx \leq \frac{\int_0^\infty F(x)dx}{1-\delta}, \varphi(x) \geq F(x).$$

Теперь для основного уравнения (1) рассмотрим следующие последовательные приближения:

$$f_{n+1}(x) = \int_x^\infty V(x,t)H\big(t, f_n(t)\big)dt, \qquad (30)$$

$$f_0(x) = e^{-p_0 x}, n = 0,1,2,\dots . \qquad (31)$$

Докажем, что

1) $f_n(x)$ $\uparrow$ по n,

2) $f_n(x) \le \varphi(x), n = 0,1,2, \dots, x \in R^+$.

Из второй части условия a) на функцию $H(t,u)$, в силу оценки (11) и (2) имеем

$$f_1(x) = \int_x^\infty V(x,t)H\big(t, f_0(t)\big)dt = \int_x^\infty V(x,t)H(t, e^{-p_0 t})dt$$
$$\ge c \int_x^\infty V(x,t)e^{-p_0 t}\,dt \ge e^{-p_0 x}.$$

Предполагая $f_n(x) \ge f_{n-1}(x)$, в силу монотонности $H(t,u)$ по u на $[e^{-p_0 t}, +\infty)$ и из неотрицательности $V(x,t)$ получим

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x), n = 0,1,2, \dots .$$

Теперь докажем, что

$$f_n(x) \le \varphi(x), n = 0,1,2, \dots . \qquad (32)$$

Так как $F(x) \le \varphi(x)$ а $F(x) \ge g(x)$, то в силу (27) и оценки (11) из определения $f_0(x)$ следует $f_0(x) \le \varphi(x)$.

Предположим, что $f_n(x) \le \varphi(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, докажем

$$f_{n+1}(x) \le \varphi(x).$$

Из первой части условия на функцию $H(t,u)$ имеем

$$f_{n+1}(x) = \int_x^\infty V(x,t)H\big(t, f_n(x)\big)\,dt \le \int_x^\infty V(x,t)\left(f_n(t) + \tilde{\beta}(t)\right)dt.$$

Следовательно, в силу предположения индукциии и представлений (8) и (9) функций $\varphi(x)$ и $g(x)$, будем иметь

$$f_{n+1}(x) \le \int_x^\infty V(x,t)\varphi(t)\,dt + \int_x^\infty V(x,t)\tilde{\beta}(t)\,dt = \int_x^\infty V(x,t)\varphi(t)\,dt + g(x) =$$
$$= \varphi(x).$$

Оценка (32) по индукции доказана.

Из доказанных фактов следует, что последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \equiv f(x),$$

причем, в силу условия c) и теоремы Б. Леви предельная функция удовлетворяет уравнению (1).

3. Примеры функции $\mathbf{H(t,u)}$

Приведем пример функции $H(t,u)$, для которой выполняются условия сформулированной теоремы. Рассмотрим следующую функцию:

$$H(t,u) = k(t,u)\sqrt{ue^{-p_0 t}},$$

где $k(t,u)$ – определенная на $R^+ \times R^+$ непрерывная функция, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$k(t,u) \geq c, t \in R^+ , u \geq e^{-p_0 t},$$
$$\sup_{t \in R^+ \times R^+} k(t,u) \equiv k_0 < +\infty,$$

$k(t,u) \uparrow$ по u на $[e^{-p_0 t}, +\infty)$ при каждом фиксированном $t \in R^+$.

В качестве $k(t,u)$ можно выбрать, например, функцию

$$k(t,u) = 1 + c - e^{-t^2 u}, (t,u) \in R^+ \times R^+$$

Условия b) и c) легко проверяемы, ибо функция $k(t,u)\sqrt{ue^{-p_0 t}} \uparrow$ по u и $k(t,u)$ – непрерывная функция на $R^+ \times R^+$.

Неравенство

$$k(t,u)\sqrt{ue^{-p_0 t}} \leq u + \tilde{\beta}(t)$$

будет выполнено, если

$$k_0\sqrt{ue^{-p_0 t}} \leq u + \tilde{\beta}(t),$$

причем, оно имеет место, при

$$\tilde{\beta}(t) \geq \frac{k_0^2 - 2}{2} e^{-p_0 t}.$$

Оценка $H(t, e^{-p_0 t}) \geq ce^{-p_0 t}$ следует из свойств функции $k(t,u)$.

Таким образом, если в качестве $\tilde{\beta}(t)$ выбрать функцию вида:

$$\tilde{\beta}(t) = \max\left(\frac{k_0^2 - 2}{2}, c\right) e^{-p_0 t}$$

то $H(t,u)$ будет удовлетворять всем условиям доказанной теоремы.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физ.-мат. наук Х.А. Хачатряну за постановку задачи и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хачатрян Х.А.*, Разрешимость консервативного интегрального уравнения на полуоси, Известия НАН Армении, Математика, 2002. Т. 37, № 4. СС. 73–80.
2. *Черчиньяни К.*, Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир. 1978. С. 495.
3. *Коган М.Н.*, Динамика разреженного газа. М.: Изд-во «Наука», 1967. С.440.
4. *Енгибарян Н.Б., Хачатрян А.Х.* Вопросы нелинейной теории динамики разреженного газа, Мат. моделирование, 2004. Т.16, № 1. СС. 67–74 .
5. *Хачатрян Х.А.,* Оценки решения одного интегрального уравнения типа Вольтерра, Ученые записки ЕрГу. Математика, 2003. № 1. СС. 21–26.
6. *Хачатрян Х.А., Григорян С.А.* О нетривиальной разрешимости одного нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна-Вольтерра // Владикавказ. Матем. журн., 2012. Т. 14, № 2. СС. 57–66.
7. *Колмогоров А.Н., Фомин, В.С.,* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Изд-во «Наука», 1981. С. 544.

INTEGRABLE SOLUTION OF ONE HAMMERSTEIN-VOLTERRA TYPE NONLINEAR INTEGRAL EQUATION ON SEMI-AXIS

T. Sardaryan

SUMMARY

The article discusses issues of positive solvability of a class of Hammerstein-Volterra type nonlinear integral equation on semi-axis. The existence of positive and integrable solution of the equation is proved.
Keywords: Hammerstein-Volterra type equation, factorization, Caratheodory condition, monotony, iteration.

ԿԻՍԱԱՌԱՆՑՔԻ ՎՐԱ ՀԱՄԵՐՇՏԵՅՆ-ՎՈԼՏԵՐԱՅԻ ՏԻՊԻ ՄԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԻՆՏԵԳՐԵԼԻ ԼՈՒԾՈՒՄ

Տ.Հ. Սարդարյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքում հետազոտվում է կիսաառանցքի վրա Համերշտեյն-Վոլտերայի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների մի դասի դրական լուծելիության հարցը: Ապացուցվում է այդպիսի հավասարումների դրական և ինտեգրելի լուծման գոյությունը:
Հիմնաբառեր՝ Համերշտեյն-Վոլտերայի տիպի հավասարում, ֆակտորիզացիա, Կարաթեոդորիի պայման, մոնոտոնություն, հաջորդական մոտավորություններ:

УДК 517.988.63 Поступила 20.02.2015г.

О ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ В l_1 ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МАТРИЦАМИ ТИПА ТЕПЛИЦА[1]

Х.А. Хачатрян, А.К. Кроян

Институт Математики НАН Армении,
Армянский Национальный Аграрный Университет
e-mail: Khach82@rambler.ru, arpi.kroyan@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В работе исследуется класс нелинейных бесконечных систем алгебраических уравнений с матрицами типа Теплица. Указанный класс уравнений имеет непосредственное применение в дискретных задачах теории переноса излучения вне однородных средах. Сочетание специальных итерационных методов с методами построения инвариантных конусных отрезков для соответствующего дискретного оператора Гаммерштейна позволяет доказать существование положительного решения указанной системы в пространстве l_1 .

Ключевые слова: система нелинейных уравнений, монотонность, однопараметрическое семейство положительных решений, теплицевая матрица.

1. Введение

В настоящей заметке исследуется следующий класс нелинейных бесконечных алгебраических уравнений с матрицами типа Теплица:

$$x_n = \sum_{j=o}^{\infty} a_{n-j} h_j\left(x_j\right), n = 0, 1, 2 \ldots \qquad (1)$$

относительно искомого бесконечного вектора $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)^T$.

В (1) предполагается, что $\mathrm{A} = \left(a_{n-j}\right)_{n,j=0}^{\infty}$– бесконечная теплицевая матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта SCS 13 YR-1A0003.

а) $a_i \ \geq 0, i \in \mathbb{Z}, a_0 = 0, \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i = 1, a_{-j} > a_j, j \in \mathbb{N},$ (2)

б) $\alpha \equiv \sum_{i=0}^{\infty} a_i > 0, \sum_{i=-\infty}^{\infty} |i| \ a_i \ < +\infty.$ (3)

Последовательность вещественных, измеримых и непрерывных в нуле функций $\{h_j(u)\}_{j=o}^{\infty}$ удовлетворяет условию «критичности»:

$$h_j(0) = 0, j \in \mathbb{N}_0, \quad (4)$$

и некоторым другим условиям (см.: формулировку основной теоремы).

Из (4) следует, что нулевой вектор $\boldsymbol{x} \equiv (0,0,0 \ldots)^{\boldsymbol{T}}$ удовлетворяет системе (1).

Система (1), помимо чисто теоретического интереса, имеет прикладное значение в дискретных задачах теории переноса излучения, в кинетической теории газов (см. [1-2]).

В случае, когда $h_j(u) = u$, j = 0,1,2..., система (1) превращается в известное в литературе дискретное уравнение Винера-Хопфа, изучению которого посвящены многочисленные работы отечественных и зарубежных авторов (см., например, [3–5] и ссылки в них).

В случае, когда

$$h_j(u) \equiv G(u), j \in \mathbb{N}_0,$$

где при некотором $\eta > 0$

$$G \in C[0,\eta], G(u) \uparrow \text{ по } u \text{ на } [0,\eta], G(\eta) = \eta, G(u) \geq u, u \in [0,\eta],$$

изучению системы (1) посвящена работа [6].

В работе Х.А. Хачатряна и М.Ф. Броян (см.[7]) разрешимость системы (1) исследована в том случае, когда

$$h_j(u) = u - \omega_j(u), j \in \mathbb{N}_0,$$

где ω_j убывает по u на некотором полубесконечном интервале $[\delta, +\infty)$, причем существует непрерывная и суммируемая на R^+ функция ω_0, такая, что $\omega_0 \downarrow$ по u на $[\delta, +\infty)$ и $\omega_j(u) \leq \omega_0(j+1+u), u \geq \delta, j = 0,1,2\ldots$.

В данной работе построено однопараметрическое семейство положительных, ограниченных решений и вычислен предел в бесконечности каждого решения этого семейства.

В настоящей работе, при некоторых дополнительных условиях на $\{h_j(u)\}_{j=o}^{\infty}$, доказывается существование положительного решения в l_1, для системы (1).

В конце работы приводятся примеры последовательности $\{h_j(u)\}_{j=o}^{\infty}$, удовлетворяющие требуемым условиям.

2. Обозначения и вспомогательные результаты

2.1. Об одном преобразовании матрицы A

Обозначим $\chi\,(p)$ − следующее преобразование матрицы A:

$$\chi(p) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, p^j\ , 0\ \leq p \leq 1\,. \tag{5}$$

В силу условия (2), данный ряд на $[0,1]$ сходится равномерно.

Из (5), с учетом (2), также имеем

$$\chi\,(0)\ = 0\,, \chi(1) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\ \equiv \alpha > 0, \alpha \leq 1, \chi \in C[0,1].$$

Нетрудно убедиться, что $\chi\,(p) \uparrow$ по p на $[0,1]$, следовательно, по теореме Больцано-Коши для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ существует число $p_\varepsilon \in (0,1)$ (причем, единственное) такое, что

$$\chi(p_\varepsilon) = \alpha\varepsilon. \tag{6}$$

Зафиксируем число $\varepsilon \in (0,1)$ (следовательно, и число p_ε) для дальнейшего изложения.

2.2. Неоднородное дискретное уравнение Винера–Хопфа

Пусть, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$− некоторая последовательность, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\beta_n \geq \frac{p_\varepsilon^n}{\alpha\varepsilon}, n \in\ \mathbb{N}_0, \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n <\ +\infty\,, \sum_{n=0}^{\infty} n\beta_n <\ +\infty. \tag{7}$$

Обозначим

$$\tau_n\ = \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j}\ \beta_j\,, n = 0, 1, 2\ ...,$$

где $\{a_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (2)-(3).

Нетрудно заметить, что тогда

$$\tau_n \geq 0, n \in \mathbb{N}_0, \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n < +\infty, \sum_{n=0}^{\infty} n\tau_n < +\infty .$$

Наряду с (1), рассмотрим следующее неоднородное дискретное уравнение Винера-Хопфа:

$$y_n = \tau_n + \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j}\, y_j\,,\ n = 0, 1, 2 \dots \tag{8}$$

относительно искомого бесконечного вектора $\boldsymbol{y}= (y_0, y_1, \dots y_n, \dots)^{\boldsymbol{T}}$.

В работе [5] доказано, что система (8) имеет положительное ограниченное решение в пространстве l_1. Обозначим

$$\eta_0 \equiv \sup_{n\in \mathbb{N}_0} y_n .$$

Следующая простая лемма будет играть важную роль в дальнейших рассуждениях.

Лемма. *Для каждого* $n \in \mathbb{N}_0$ *справедливо неравенство* $\tau_n \geq p_\varepsilon^n$.

Доказательство. Из представления $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$, в силу условий (2) и (7), с учетом (6), при $n \in \mathbb{N}_0$ будем иметь:

$$\tau_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j}\, \beta_j \geq \frac{1}{\alpha\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j}\, p_\varepsilon^j = \frac{1}{\alpha\varepsilon} \sum_{i=-\infty}^{n} a_i\, p_\varepsilon^{n-i} =$$

$$= \frac{1}{\alpha\varepsilon}\, p_\varepsilon^n \sum_{i=-\infty}^{n} a_i\, p_\varepsilon^{-i} \geq \frac{1}{\alpha\varepsilon}\, p_\varepsilon^n \sum_{i=-\infty}^{0} a_i\, p_\varepsilon^{-i} = \frac{p_\varepsilon^n}{\alpha\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} a_{-j}\, p_\varepsilon^j \geq \frac{p_\varepsilon^n}{\alpha\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, p_\varepsilon^j =$$

$$= \frac{p_\varepsilon^n}{\alpha\varepsilon} \chi(p_\varepsilon) = p_\varepsilon^n .$$

Лемма доказана.

Пусть, $\omega_j \in C_0(R^+) \equiv \{v \in C(R^+),\ \lim_{t\to\infty} v(t) = 0\}$, j = 0,1,2, ... – функции для которых

k$_1$) существует число $\delta > 0$ – такое, что $\omega_j(u) \downarrow$ по u на $[\delta, +\infty)$, $j =$ 0,1,2, ... ,

k$_2$) существует функция

$\omega_0 \in L_1(R^+) \cap C_0(R^+), \omega_0 \downarrow [\delta, +\infty), m_1(\omega_0) \equiv \int_0^\infty x\, \omega_0(x) dx < +\infty,$

такая, что

$$\omega_j(u) \le \omega_0(j+1+u), u \ge \delta, j = 0,1,2 \dots .$$

В работе [7] доказано, что при таких условиях на функции $\{\omega_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ система

$$z_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} \left(z_j - \omega_j(z_j)\right), n \in \mathbb{N}_0 \tag{9}$$

относительно искомого вектора $\boldsymbol{z} = (z_0, z_1, \dots z_n, \dots)^T$ имеет однопараметрическое семейство положительных решений

$$\boldsymbol{z_\gamma} = \left(z_0^\gamma, z_1^\gamma, \dots z_n^\gamma \dots\right)^T, \gamma \in \Delta,$$

причем, справедливы следующие утверждения:

1) $z_n^\gamma \ge 0, n \in \mathbb{N}_0, \gamma \in \Delta$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^\gamma = \dfrac{2\gamma}{1-\gamma_+}, \gamma_+ \in (0,1), \gamma \in \Delta$,

3) $S_n^\gamma \le 2S_n^\gamma - r_n \le z_n^\gamma \le 2\, S_n^\gamma, n \in \mathbb{N}_0, \gamma \in \Delta,$ (10)

где $S_n^\gamma = \gamma\, S_n$, а S_n − единственное решение следующей начальной задачи для дискретного однородного уравнения Винера- Хопфа:

$$\begin{cases} S_n = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{n-j} S_J, n \in \mathbb{N}_0, \\ S_0 = 1, \end{cases} \tag{11}$$

а $\Delta \equiv [max(\varkappa, \gamma_0), +\infty), \gamma_0 > \delta$ − некоторое число, для которого $\omega_0(\gamma_0) < \gamma_0$, $\varkappa = sup_{n\in\mathbb{N}_0} r_n$, где $\boldsymbol{r} = \left(r_{0,} r_{1,} \dots, r_{n,} \dots\right)^{\boldsymbol{T}} \in l_1$ − положительное решение следующего неоднородного дискретного уравнения Винера-Хопфа:

$$r_n = 2\omega_0(n+1+\delta) + \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j}\, r_j, n \in \mathbb{N}_0, \tag{12}$$

4) если $\gamma_{1,}\gamma_2 \in \Delta$ и $\gamma_1 > \gamma_2$, то

$$z_n^{\gamma_1} - z_n^{\gamma_2} \ge 2(\gamma_1 - \gamma_2). \tag{13}$$

Как известно (см.[5]), при условиях (2) − (3), задача (11) имеет положительное монотонно возрастающее решение $\boldsymbol{S} = (S_0, S_1, \dots S_n \dots)^T$, причем

$$S_n > 0,\ S_n \uparrow \frac{1}{1-\gamma_+},\ \text{когда } n \to \infty, \tag{14}$$

$$\sum_{n=o}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\gamma_+} - S_n\right) < +\infty. \tag{15}$$

В силу (14) и (15), из (10) имеем следующую оценку:

$$0 \le \frac{2\gamma}{1-\gamma_+} - 2\, S_n^{\gamma} \le \frac{2\gamma}{1-\gamma_+} - z_n^{\gamma} \le \frac{2\gamma}{1-\gamma_+} - 2\, S_n^{\gamma} + r_n\,. \tag{16}$$

Отсюда в силу $\boldsymbol{r} = (r_{0,}r_{1,} \dots, r_{n,} \dots)^{\boldsymbol{T}} \in l_1$ и (15), имеем

$$\sum_{n=o}^{\infty}\left(\frac{2\gamma}{1-\gamma_+} - 2S_n + r_n\right) = 2\gamma\sum_{n=o}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\gamma_+} - S_n\right) + \sum_{n=0}^{\infty} r_n < +\infty\,.$$

Следовательно, из оценки (16) для всякого $\gamma \in \Delta$ справедливо

$$\sum_{n=o}^{\infty}\left(\frac{2\gamma}{1-\gamma_+} - z_n^{\gamma}\right) < +\infty\,.$$

Этот факт является существенным для доказательства основного результата.

3. Основной результат

Теорема. Пусть, последовательность $\{a_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (2), (3), а $\varkappa, \alpha, \gamma_0, \eta_0, p_\varepsilon, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\omega_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ те же, что и в предыдущих страницах, $\gamma^* = max(\varkappa, \gamma_0)$. *Если для некоторого числа* $\varepsilon \in (0,1)$ *и* $\eta \ge \eta_0 + \frac{2\gamma^*}{1-\gamma_+}$, ($\gamma_+ \in (0,1)$ *и определяется с помощью A) функций* $h_j \in C[\,0, \eta\,]$, $j \in \mathbb{N}_0$ *удовлетворяют следующим условиям (!) при каждом фиксированном j* ($j \in \mathbb{N}_0$) *функция* $h_j(u) \uparrow$ *по u на отрезке* $[p_\varepsilon^j, \eta]$,

(!!) имеют место неравенства

$$h_j(p_\varepsilon) \ge \frac{1}{\alpha\varepsilon}\, p_\varepsilon^j\,, j \in \mathbb{N}_0, \tag{17}$$

$$h_j(u) \le u + \omega_j(\eta - u) + \beta_j\,,\ j \in \mathbb{N}_0\,,\ p_\varepsilon^j \le u \le \eta, \tag{18}$$

то система (1) имеет положительное решение в пространстве l_1.

Доказательство. Рассмотрим следующие последовательные приближения для системы (1):

$$x_n^{(m+1)} = \sum_{j=o}^{\infty} a_{n-j} h_j\left(x_j^{(m)}\right), x_j^{(0)} = p_\varepsilon^j, m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_0. \quad (19)$$

По индукции докажем, что

$$x_n^{(m)} \uparrow \text{по m},$$

и

$$x_n^{(m)} \leq \frac{2\gamma^*}{1-\gamma_+} - z_n^{\gamma^*} + y_n, m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_0. \quad (20)$$

Действительно, с учетом леммы, в силу (17), из (19) имеем:

$$x_n^{(1)} = \sum_{j=o}^{\infty} a_{n-j} h_j\left(p_\varepsilon^j\right) \geq \frac{1}{\alpha\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j}\, p_\varepsilon^j \geq p_\varepsilon^n = x_n^{(0)}.$$

Теперь, предполагая $x_n^{(m)} \geq x_n^{(m-1)}$, при некотором $m \in \mathbb{N}_0$, и учитывая монотонность последовательности $\{h_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$, из (19) получим:

$$x_n^{(m+1)} \geq \sum_{j=o}^{\infty} a_{n-j} h_j\left(x_j^{(m-1)}\right) = x_n^{(m)}.$$

Итак, мы доказали, что при всяком фиксированном $n \in \mathbb{N}_0$ последовательность $x_n^{(m)}$ возрастает по m.

Теперь займемся доказательством неравенства (20). Сначала докажем это неравенство для $m = 0$. Действительно, с использованием леммы, формул (10) и (14), получим:

$$\frac{2\gamma^*}{1-\gamma_+} - z_n^{\gamma^*} + y_n \geq y_n \geq \tau_n \geq p_\varepsilon^n = x_n^{(0)}, n \in \mathbb{N}_0.$$

Пусть, $x_n^{(m)} \leq \frac{2\gamma^*}{1-\gamma_+} - z_n^{\gamma^*} + y_n$ при некотором $m \in \mathbb{N}_0$. Тогда в силу монотонности $h_j(u)$ по u и предположения индукции из (19), используя оценку (18) имеем:

$$x_n^{(m+1)} \leq \sum_{j=o}^{\infty} a_{n-j} h_j\left(\frac{2\gamma^*}{1-\gamma_+} - z_j^{\gamma^*} + y_j\right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=o}^{\infty} a_{n-j}\left(\frac{2\gamma^*}{1-\gamma_+} - z_j^{\gamma^*} + y_j + \omega_j\left(\eta - \frac{2\gamma^*}{1-\gamma_+} + z_j^{\gamma^*} - y_j\right) + \beta_j\right),$$

$$n \in \mathbb{N}_0.$$

Из определения числа η_0 , условия $\eta \geq \eta_0 + \frac{2\gamma^*}{1-\gamma_+}$, монотонности $\omega_j\ (u)$ по u и определения $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ получаем, что

$$x_n^{\ (m+1)} \leq \sum_{j=o}^{\infty} a_{n-j}\left(\frac{2\gamma^*}{1-\gamma_+} - z_j^{\gamma^*} + y_j + \omega_j\ \left(z_j^{\gamma^*}\right)\right) + \tau_n =$$

$$= \sum_{j=o}^{\infty} a_{n-j} y_j + \tau_n +$$

$$+\sum_{j=o}^{\infty} a_{n-j}\left(\frac{2\gamma^*}{1-\gamma_+} - z_j^{\gamma^*} + \omega_j\ \left(z_j^{\gamma^*}\right)\right) = y_n + \frac{2\gamma^*}{1-\gamma_+}\sum_{j=o}^{\infty} a_{n-j} -$$

$$-\sum_{j=o}^{\infty} a_{n-j}\left(z_j^{\gamma^*} - \omega_j\ \left(z_j^{\gamma^*}\right)\right).$$

Так как $\boldsymbol{z_{\gamma^*}}$ является решением системы (9), то в силу (2) имеем, что

$$x_n^{\ (m+1)} \leq y_n + \frac{2\gamma^*}{1-\gamma_+} - \mathrm{z}_n^{\gamma^*}, m, n \in \mathbb{N}_0 .$$

Следовательно, последовательность векторов $\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{m})} = (x_0^m, x_1^m, \dots x_n^m, \dots)^T$ имеет предел, когда $m \to \infty$:

$$\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{m})} = \boldsymbol{x},$$

причем, координаты предельного вектора $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \dots x_n, \dots)^T$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$p_\varepsilon^n \leq x_n \leq y_n + \frac{2\gamma^*}{1-\gamma_+} - \mathrm{z}_n^{\gamma^*}, n \in \mathbb{N}_0, \sum_{n=0}^{\infty} x_n < +\infty.$$

Из непрерывности $\left\{h_j\,(u)\right\}_{j=0}^{\infty}$ по u , с учетом (18), следует, что $\boldsymbol{x}$ удовлетворяет системе (1).

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что результаты теоремы остаются в силе, если вместо условий (2), (3) потребовать следующие более слабые условия:

$$a_{\ i} \geq 0, i \in \mathbb{Z}, a_0 = 0, \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i = 1, a_{-j} \geq a_j, j \in \mathbb{N},$$

$$\alpha \equiv \sum_{i=0}^{\infty} a_i > 0, \sum_{i=-\infty}^{\infty} |i| \; a_i \; < +\infty, \nu(A) \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} j \, a_j \; < 0.$$

В конце работы приведем примеры функций $\{h_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$, удовлетворяющих всем условиям доказанной теоремы. В качестве $h_j(u)$ могут служить следующие функции:

I) $h_j(u) = \frac{1}{\alpha\varepsilon} \sqrt{u p_\varepsilon^j}, p_\varepsilon^j \le u \le \eta, j \in \mathbb{N}_0,$

с соответствующей последовательностью $\{\beta_j\}_{j=0}^{\infty}$ с членами

$$\beta_j \equiv max\left(\frac{1}{\alpha\varepsilon}, \frac{1}{2\alpha^2\varepsilon^2}\right) \cdot p_\varepsilon^j, j \in \mathbb{N}_0 .$$

II) $h_j(u) = \dfrac{u^r}{\eta^{r-1}} + \dfrac{2p_\varepsilon^j u}{\alpha\varepsilon(u + p_\varepsilon^j)}, r > 1, p_\varepsilon^j \le u \le \eta, j \in \mathbb{N}_0,$

с последовательностью $\{\beta_j\}_{j=0}^{\infty}$ с членами

$$\beta_j = \frac{2}{\alpha\varepsilon} \cdot p_\varepsilon^j, j \in \mathbb{N}_0 .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Енгибарян Н.Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения. Астрофизика. Т. 2. № 4, 1966. СС. 31–36.

2. *Енгибарян Н.Б., Хачатрян А.Х.* Вопросы нелинейной теории динамики разреженного газа.Мат. Моделирование. Т. 16. № 1, 2004. СС. 67–74.

3. *Арабаджян Л.Г., Енгибарян Н.Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Итоги науки и техники, Математический анализ, 1984. Т. 22. СС.175–242.

4. *Пресдорф. З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979. С. 493.

5. *Арабаджян Л.Г.* О дискретных уравнениях Винера-Хопфа в консервативном случае // «Математический анализ и его приложения» (Арм. пед. институт). № 1, 1980. СС. 26–36.

6. *Хачатрян Э.А*. Об одной бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений в критическом случае // «Математика в высшей школе». Т. 4. № 4, 2008. СС. 53–57.

7. *Хачатрян Х.А., Броян М.Ф.* Однопараметрическое семейство положительных решений для одного класса нелинейных бесконечных алгебраических систем с матрицами типа Теплица-Генкеля // «Известия НАН Армении: Математика». Т. 48. № 5, 2013. СС. 63–78.

ON THE POSITIVE SOLVABILITY OF ONE INFINITE SYSTEM OF NONLINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS IN l_1 WITH TEOPLITZ TYPE MATRICES

Kh. Khachatryan, A. Kroyan

SUMMARY

The article examines one class of the infinite system of nonlinear algebraic equations with Teoplitz type matrices. The above-mentioned class of equations has direct applications in discrete problems of radiation transfer theory. The combination of special iteration methods with the method of construction of invariant cone segments for Hammerstein discrete operator allows us to prove the existence of positive solution in space l_1.

Keywords: system of nonlinear equations, monotonicity, one parametric family of positive solutions, Teoplitz matrix.

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ, ՏՅՈՊԼԻՑԻ ՏԻՊԻ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐՈՎ ԱՆՎԵՐՋ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԴՐԱԿԱՆ ԼՈՒԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ l_1 – ՈՒՄ

Խ.Ա. Խաչատրյան, Ա.Կ. Կռոյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքում հետազոտվում է ոչ գծային Տյոպլիցի տիպի մատրիցներով անվերջ հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի մի դաս: Նշված հավասարումների դասն անմիջական կիրառություն ունի ճառագայթման տեղափոխման տեսության դիսկրետ խնդիրներում: Հատուկ իտերացիոն մեթոդների զուգակցումը համապատասխան Համերշտեյնի դիսկրետ օպերատորի համար ինվարիանտ կոնային հատվածների կառուցման մեթոդի հետ, հնարավորություն է տալիս ապացուցել նշված համակարգի դրական լուծման գոյությունը ℓ_1 տարածությունում:

Հիմնաբառեր՝ ոչ գծային հավասարումների համակարգ, մոնոտոնություն, մեկ պարամետրանոց դրական լուծումների ընտանիք, տյոպլիցյան մատրից:

УДК 004.932 Поступила 05.05.2015г.

МЕТОДИКА ОБНАРУЖЕНИЯ ОГНЯ ПУТЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЯ КОНТРОЛИРУЕМОЙ МЕСТНОСТИ

Д.Г. Асатрян, С.М. Овсепян

АННОТАЦИЯ

Обнаружение огня и/или пламени путем удаленного фотографирования контролируемой местности и автоматизированного анализа сцен является актуальной задачей. В настоящее время получили широкое применение компьютерные системы с использованием методов цифровой обработки изображений. В работе предложен подход к решению этой задачи, основанный на использовании информации с участков изображения сцены, содержащих и не содержащих огонь. Предложены: алгоритм считывания информации, методы предварительной обработки данных цветовых компонент изображения, статистической обработки и классификации данных. Показана эффективность предложенных процедур.

Ключевые слова: Пожар, огонь, обработка изображений, сегментация, классификация.

1. Введение

Пожары обычно причиняют значительные потери народному хозяйству и серьезно влияют на качество жизни цивилизации. Поэтому обнаружение пожаров является необходимой компонентой обеспечения защиты жизни и имущества людей. При этом особую важность приобретают средства и методы раннего обнаружения огня, позволяющие значительно уменьшить возможные потери.

В настоящее время мониторинг пожароопасных территорий во всем мире осуществляется с помощью аэрофото- и видеоаппаратуры, беспилотных летающих аппаратов и различных средств дистанционного зондирования, которые используют чувствительные датчики, реагирующие на огонь. В зависимости от времени суток, характера ландшафта, размеров территории, погодных и других условий, в которых производится мониторинг, применяются те или иные средства наблюдений, наиболее подходящие к конкретной обстановке. Соответственно, применяются определенные методы обработки

информации, полученной используемыми средствами в процессе обследования территории.

Одним из наиболее эффективных и сравнительно недорогих методов получения информации о пожарах является метод видеосъемки и соответствующей цифровой обработки изображений. Литература, посвященная приложениям методов обработки изображений с целью обнаружения огня и пожаров, весьма обширна, поэтому ограничимся обзором основных методов и сошлемся на достаточно обстоятельные обзоры, опубликованные в научной литературе в последние годы [7–9].

Методы обработки изображений, приложенные к задаче обнаружения огня, делятся на два класса, в зависимости от того, используется видеозапись или фиксированный кадр. Обработка каждого фиксированного изображения проходит, как правило, в три этапа: а) анализ пиксельной информации; б) выделение подозрительных участков изображения; в) принятие решения о наличии огня и координатах участка, содержащего огонь. При обработке видеопоследовательности анализируется не только содержание каждого кадра, но и выявляются тенденции изменения (движения) определенных характеристик последовательных кадров. Однако очевидно, что качество обработки данных в этом случае во многом зависит от применяемых методов анализа содержания фиксированных кадров.

В настоящей работе мы исходим из положения, что образ огня представляет собой некоторый связный участок анализируемого изображения, обладающий определенным распределением интенсивности пикселов и формой в выбранном цветовом пространстве. Следовательно, для выделения подобных участков изображения наиболее подходящим методом является его надлежащая сегментация.

Рассмотрим основные методы сегментации цветных изображений, описанные в научной литературе применительно к задаче обнаружения огня.

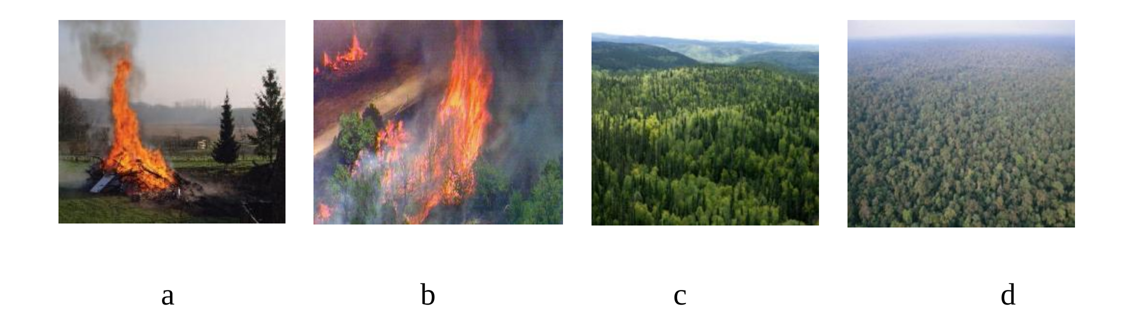
В работе [1] использовали YUV цветовую модель для представления видеоданных. Они использовали производную по времени яркостной компоненты Y для обнаружения кандидат участков, а компоненты цветности U и V были использованы для проверки, входит ли пиксел в сектор огня или нет. В дополнение к компонентам яркости и цветности они включили движение в своей работе. Они сообщают, что их алгоритм обнаруживает менее одного ложного срабатывания в неделю. Но в этой работе не указано количество проведенных тестов.

Методика обнаружения огня и дыма предложена в [2], основанная на использовании цветовых пространств RGB и YCbCr. Для пиксела из участка огня в работе обнаружена закономерность типа $Y > Cr > Cb$. Для обнаруже-

ния дыма проверяется выполнимость системы трех неравенств $|R - G| < Th$, $|R - B| < Th$ и $|B - G| < Th$, где Th находится между 15 и 25. Этот метод обладает тем недостатком, что не учитывается соотношение компонент цвета: для фотографии одной и той же местности можно получить различные результаты, меняя яркость изображения.

Работа [3] содержит некоторое усовершенствование метода [2]. В частности, уточняются значения RGB-компонент, вычисляются средние значения компонент Y_{mean}, Cr_{mean}, Cb_{mean} и добавляет несколько правил, которые усиливают проверку на наличие огня. Но эта работа также не устраняет проблемы, указанной выше, так как рассматривает пиксел по отдельности, а не весь сегмент и не учитывает соотношение цветов.

В настоящей работе предложен подход, при котором анализируются участки изображений двух типов: содержащих и не сожержащих огонь или пламя. Важной особенностью подхода является метод считывания и предварительной обработки информации, при котором уменьшается влияние освещенности объекта при фотографировании. Далее обработка информации происходит в два этапа – этап обучения и этап тестирования. На этапе обучения анализируется достаточно много изображений, представленных в определенных цветовых пространствах, которые содержат или не содержат участки с огнем, затем производится полная сегментация изображения и его упрощение с регистрацией средних интенсивностей сегментов. После формирования массивов данных производится статистический анализ по определению числовых характеристик данных. На этапе тестирования значения интенсивностей, полученные на этапе обучения, используются для классификации методом «эталонов». Соответствующие алгоритмы описаны в разделе 3.



a b c d

Рис. 1. Изображения с огнем (a и b) и без огня (c и d).

2. Методика формирования экспериментальных данных

Отбор исходного набора изображений. В Интернете, научно-технической литературе, видеоматериалах и других источниках информации можно найти множество цветных изображений сцен, на которых отчетливо выделяются участки с огнем или пламенем. При выполнении настоящей работы был проведен отбор таких сцен, цветовая палитра и параметры которых позволяют визуально классифицировать их как изображения, содержащие или не содержащие участки с огнем. Соответственно, указанные типы изображений рассматриваются как элементы двух альтернативных классов. Эти классы назовем «Класс 1» и «Класс 2». На Рис. 1 показаны типичные примеры изображений обоих классов.

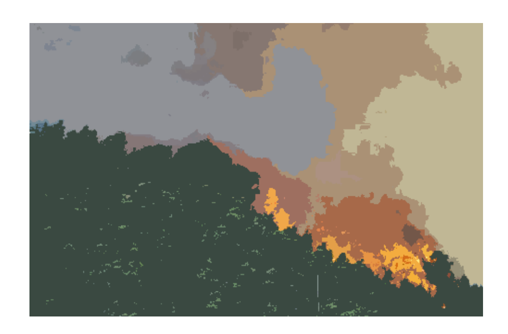
Формирование массивов экспериментальных данных выполняется путем извлечения численной информации из соответствующих участков изображения для последующей статистической обработки. Для этого сначала производится полная сегментация и упрощение каждого отобранного изображения, затем регистрируются значения цветовых RGB компонент изображений обоих классов. Приведем краткое описание упомянутых процедур.

1. *Сегментация и упрощение изображения* производятся применением алгоритма сегментации, описанного в [5–6]. Сначала рассмотрим, для простоты, изображение I , имеющее формат GrayScale (8 bit). В соответствии с этим алгоритмом, все изображение разбивается на непересекающиеся связные области, каждая из которых состоит из пикселов, интенсивности которых находятся в одном и том же интервале, задаваемом некоторым набором пороговых значений. При визуализации общей картины сегментации производится операция, называемая *упрощением*, при которой интенсивность каждого пиксела заменяется на среднее значение по сегменту. При визуальном анализе результата сегментации операция упрощения позволяет оценивать и сравнивать различные решения путем варьирования количества порогов и их значений.

Для сегментации цветного изображения используется аналог описанного выше алгоритма, при котором изображение сначала распадается на соответствующие цветовые компоненты, затем для каждого компонента производится полная сегментация и упрощение, после чего полученные упрощенные компоненты снова конвертируются в цветное изображение.

Поскольку в задаче обнаружения огня важно обнаружение сегмента с определенными цветовыми свойствами, то для успешного применения предложенной процедуры необходимо установить количество и значения пороговых значений, используемых при сегментации цветовых компонент. Резуль-

таты предварительной обработки тестовых изображений показали, что зачастую можно ограничиваться количеством порогов не более двух. При увеличении этого количества участок изображения с огнем разбивается на множество мелких частей, что усложняет анализ и интерпретацию получаемых результатов. Если ограничиваться одним или двумя пороговыми значениями, то в большинстве реальных случаев получается вполне адекватная цветовая палитра, позволяющая достаточно уверенно обнаруживать участки с огнем. Выбор пороговых значений можно осуществлять либо экспериментально, либо применяя алгоритм Отсу [6]. На Рис. 2 для иллюстрации сказанного приведены примеры сегментации одного и того же изображения одним или двумя порогами, делящими интервал интенсивностей пикселов (0,255) на примерно равные части.



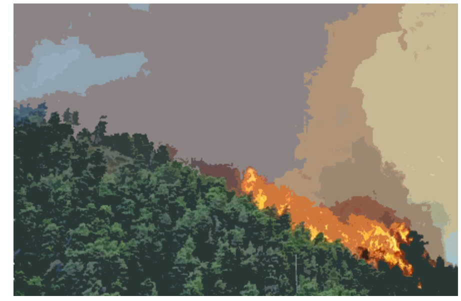


Рис. 2. Сегментация и упрощение изображения с одним (a) или двумя (b) порогами.

2. Значения цветовых RGB-компонент соответствующих участков изображений рассчитываются следующим образом. Путем визуального анализа на участке изображения из класса с огнем находятся сегменты, образующие пламя или огонь, и рассчитываются средние значения интенсивностей RGB-компонент. Аналогично рассчитываются средние для участков изображений из второго класса. Найденные числовые данные заносятся в таблицу.

Обозначим исходные значения цветовых компонент через R_i, G_i, B_i, i=1,2,…, K, где K – общее количество рассматриваемых изображений. Предварительный анализ и обработка числовых данных, описанных выше, выявили некоторую зависимость интенсивностей пикселов от степени общей освещенности сцены, поэтому возникла необходимость нормирования значений цветовых компонент по их суммарной интенсивности по формулам:

$$R_i = 255 * r_i \Big/ \sqrt{r_i^2 + g_i^2 + b_i^2}, \quad G_i = 255 * g_i \Big/ \sqrt{r_i^2 + g_i^2 + b_i^2}, \quad B_i = 255 * b_i \Big/ \sqrt{r_i^2 + g_i^2 + b_i^2}.$$

Эффективность применения нормирования по данной схеме наглядно иллюстрируется на Рис. 3, где, для сравнения, приведены графики рассеяния

данных до и после нормировки. Видно, что в случае (b) данные группируются компактнее, чем в случае (a).

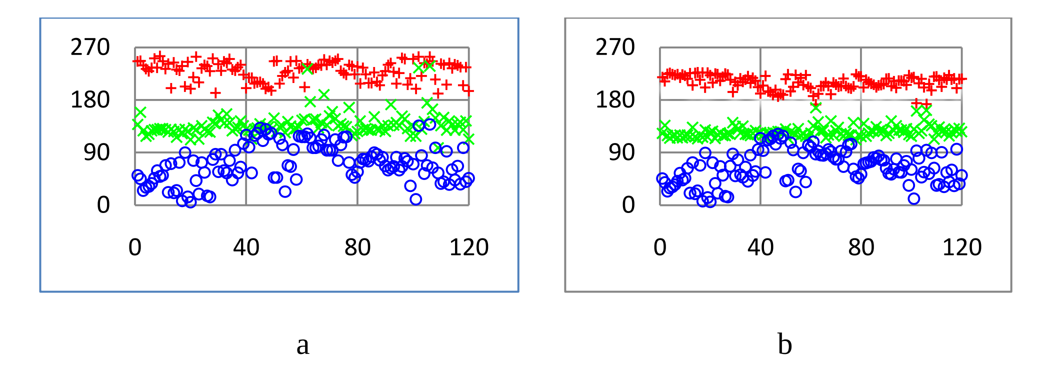


Рис. 3. Графики рассеяния компонент цветности данных до (a) и после (b) нормировки.

3. Обнаружение огня как задача классификации с обучением

После того, как сформированы классы изображений с участками, содержащими или не содержащими огонь, и получены числовые массивы соответствующих данных, проводятся статистическая обработка и анализ с целью нахождения «эталонных» значений цветовых компонент каждого класса. Отнесение же некоторого изображения к одному из классов (т.е. установление присутствия или отсутствия огня в данном изображении) может быть выполнено путем сравнения значений его цветовых компонент с эталонными значениями.

Для численной проверки эффективности предложенной процедуры обнаружения огня каждый из классов нами разделен на два подкласса – подкласс О (обучающий) и Т (тестовый), применяя при этом случайный выбор. Обозначим эти подклассы через O_1, T_1, O_2 и T_2, соответственно. Такое разделение позволяет вычислить количество ошибок классификации и тем самым оценить в целом качество предложенной процедуры обнаружения огня. В Таблице 1 приведены усредненные значения и среднеквадратические отклонения (СКО) цветовых компонент для обучающих подклассов, определенных выше. Соответственно, средние значения компонент, приведенных в Таблице 1, будем считать в качестве «эталонных».

Приведенные данные показывают, что соотношение уровней цветовых компонент в классах различно, что соответствует литературным данным, приведенным во Введении.

Классификация производится путем сравнения цветовых компонент всех изображений из тестовых подклассов с эталонными значениями, приведенными в Таблице 1. В результате проверки получены следующие результаты: присутствие огня обнаруживается в 92.5% случаев, но в 5.5% случаев участок без огня ошибочно принимается за участок с огнем (ложная тревога).

Таким образом, предложенный алгоритм обнаружения огня, основанный на анализе цветовых компонент различных участков изображения местности, позволяет принимать уверенное решение о присутствии или отсутствии огня и/или пламени.

Таблица 1. Числовые характеристики подклассов цветовых компонент.

	O_1			O_2		
	R	G	B	R	G	B
Среднее	209.6	125.6	65.4	161.6	145.8	128.2
СКО	12.1	9.4	28.2	21.0	13.6	24.7

4. Выводы

В работе предложена методика обнаружения огня путем использования данных фотографирования контролируемой местности с последующей компьютерной обработкой данных. Предложена методика считывания информации, предварительной обработки данных цветовых компонент изображения, статистической обработки и классификации данных. Показана эффективность предложенных процедур. Предложенная методика может быть использована в системах мониторинга местности с целью обнаружения огня или пламени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Marbach G., Loepfe M., Brupbacher T.* An image processing technique for fire detection in video images, Fire Saf. J. 41 (4). PP. 285–289, 2006.

2. *Celik T., Demirel H., Ozkaramanli H.* Fire and Smoke Detection without Sensors: Image Processing Based Approach, Proceedings of 15th European Signal Processing Conference, Poland, September 3–7, 2007.

3. *Vipin V.* Image Processing Based Forest Fire Detection, International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering, ISSN 2250-2459. PP. 87–95, 2012.

4. *Asatryan D.G., Sazhumyan G.S., Shahverdyan H.S.* Technique for Coherent Segmentation of Image and Applications. Mathematical Problems of Computer Science, IIAP, Yerevan, Armenia, Vol. 28, 2007. PP. 88–93.

5. *Asatryan D., Sazhumyan G.* Segmentation Based Fingerprint Pore Extraction Algorithm. International Journal «Information models and Analysis», Vol. 1. PP. 134–138, 2012.

6. *Otsu N.* A threshold selection method from gray-level histograms. IEEE Trans. Syst. Manage. Cybern. (SMC) 9: 62; PP. 377–393б,1979.

7. *Gonzalez J.R., Palahi M., Trasobares A., Pukkala T.* A fire probability model for forest stands in Catalonia (north-east Spain), Annals of Forest Science, PP.169–176, 2006.

8. *Fok C.L., Roman G.C. and Lu C.* Tracking fires using mobile agents in a wireless sensor network," in Proceedings of the 4-th International Conference on Information Processing in Sensor Networks, Los Angeles, Calif, USA, April 2005.

9. *Chen T.-H., Wu P.-H. and Chiou Y.-C.* An early fire-detection method based on image processing," in Proceedings of the International Conference on Image Processing (ICIP '04), vol. 3. PP. 1707–1710, October 2004.

FIRE DETECTION METHOD USING SPATIAL ANALYSIS OF IMAGE OF THE MONITORED AREA

D. Asatryan, S. Hovsepyan

SUMMARY

The detection of fire and/or flame using remote photographing monitored area is a pressing problem. Nowadays the computer systems, using methods of digital processing, have wide applications. In this paper an approach to solve the delivered problem by using the information on area segments with and without fire is proposed. An algorithm for information readout, methods for preliminary processing of colour components, statistical processing and classification are proposed. The effectiveness of the proposed procedures is shown.

Keywords: fire, flame, image processing, segmentation, classification.

ՀՍԿՎՈՂ ՏԱՐԱԾՔԻ ՊԱՏԿԵՐԻ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ ԿՐԱԿԻ ՀԱՅՏՆԱԲԵՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Դ.Գ. Ասատրյան, Ս.Մ. Հովսեփյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հրդեհի և/կամ կրակի հայտնաբերումը հսկվող տարածքի հեռահար նկարահանման և տեսարանի ավտոմատացված վերլուծության միջոցով արդիական խնդիր է: Ներկայումս լայն կիրառում են ստացել պատկերների թվային մշակման մեթոդների օգտագործմամբ գործող կոմպյուտերային համակարգերը: Հոդվածում նշված խնդիրը լուծելու համար առաջարկվել է մոտեցում, որը հիմնված է տեսարանի՝ կրակ պարունակող և չպարունակող հատվածներից ստացված ինֆորմացիայի օգտագործման վրա: Առաջարկվել է ինֆորմացիայի ստացման ալգորիթմ, պատկերի

գունային բաղադրիչների տվյալների նախնական մշակման, վիճակագրական վերլուծության և դասակարգման մեթոդներ: Ցույց է տրվել առաջարկված պրոցեդուրաների արդյունավետությունը:
Հիմնաբառեր՝ հրդեհ, կրակ, պատկերների մշակում, հատվածավորում, դասակարգում:

УДК: 004.932.2/625.7/625.8 Поступила 03.09.2015г.

МЕТОДИКА МОРФОЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ КАЧЕСТВА ДОРОЖНОГО ПОКРЫТИЯ

Д.Г. Асатрян, Г.О. Акопян

АННОТАЦИЯ

Морфологический анализ структуры и оценивание качества дорожного покрытия (ДП) являются важными научно-техническими задачами, основанными на совместном применении различных технических средств обследования и современных методов обработки изображений. Основные процедуры анализа, обнаружения дефектов и оценивания состояния ДП используют алгоритмы бинаризации, сегментации, обнаружения краев и границ в изображении, и статистические методы обработки данных. В настоящей работе предложены специальные алгоритмы бинаризации и сегментации, а также методика классификации сегментов на артефакты и трещины. На реальном экспериментальном материале проведены статистические расчеты, показывающие эффективность предложенных процедур.

Ключевые слова. Дорожное покрытие, трещина, качество, бинаризация, сегментация, классификация.

1. Введение

Контроль и мониторинг состояния дорожного покрытия (ДП) являются необходимыми действиями, выполняемыми регулярно соответствующими службами для обеспечения требуемого качества автомобильных дорог.

Качество ДП характеризуется многими факторами – такими, как степень отклонения поверхности покрытия дороги от предписанных норм, так и разнообразные типы дефектов, неизбежно возникающих в результате эксплуатации дороги. В зависимости от категории дороги и наблюдаемой степени качества ДП применяются различные подходы, начиная от визуального анализа с ручной обработкой данных, заканчивая разработкой и применением автоматизированных систем, оснащенных специальными датчиками и приспособлениями. Разработка и реализация любого из этих подходов применительны к огромной сети и большой протяженности существующих дорог требует много времени и средств (в т.ч. финансовых), поэтому в научной

литературе издавна уделяется большое внимание соответствующим вопросам методологического и технического характера [1].

В последние десятилетия возрос интерес к методам анализа и оценивания качества ДП, основанным на применении техники компьютерного зрения и обработки изображений. Это объясняется не только низкой стоимостью современных фото- и видеорегистраторов, но и богатыми возможностями методов цифровой обработки и обнаружения объектов разного типа на изображениях любых сцен. Однако, несмотря на все это, универсальных методов, пригодных для анализа и оценивания произвольных параметров качества ДП, не существует. Поэтому методы, предложенные в научной литературе для решения этой задачи, ограничиваются определенными, вполне конкретными ситуациями, которых, впрочем, тоже достаточно много.

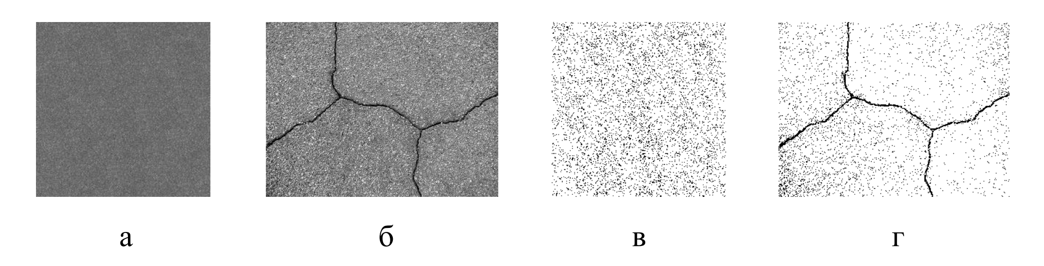
Основными операциями обработки изображений, применяемых практически во всех задачах исследования ДП, являются операции бинаризации, сегментации, определения краев и границ и некоторые другие операции морфологического анализа. Выбор методов обработки обусловлен требованиями решаемой задачи и становится особенно критичным при автоматической обработке изображений ДП.

В литературе отмечается ряд трудностей автоматического обнаружения трещин, связанных с небольшим различием яркости трещины от окружающего фона, неоднородности интенсивности в области самой трещины, наличии затенений, загрянений и других артефактов [1, 2]. Если исходить из предположения, что все же яркость пикселов внутри трещины в среднем ниже, чем у его окружения, напрашивается простой метод различения трещины от окружения путем бинаризации изображения. Однако для бинаризации изображения нужно найти подходящий порог, что само по себе является достаточно сложной задачей. Если выбрать единый порог для всего изображения, то из-за возможной неравномерности освещенности рассматриваемой области разные участки изображения будут бинаризованы с различной информативностью. Поэтому ряд авторов предпочитает выполнить бинаризацию для участков изображения, предварительно выделенных по различным критериям неоднородности [3]. В случае двухмодового распределения интенсивности пикселов применяется широко распространенный метод Отсу [4], который, однако, в других случаях часто дает неприемлемые результаты. Множество других методов бинаризации рассмотрено в обзорной работе [5].

Таким образом, задача эффективного обнаружения трещин по изображению ДП нуждается в комплексном подходе к процедуре бинаризации, основанной на анализе и использовании локальных свойств ДП и применения соответствующих алгоритмов бинаризации и сегментации.

В настоящей работе рассматривается задача оценивания качества ДП путем обнаружения, выделения и анализа параметров трещин, имеющихся на неподвижном изображении исследуемого участка ДП.

Предварительные исследования на многочисленных примерах изображений, описанных в литературе, а также полученных собственными съемками, показали, что для успешного различения трещин от артефактов большое значение имеет информация о возможном соотношении их размеров. В частности, замечено, что при автоматической бинаризации даже весьма качественного дорожного покрытия выделяются сегменты (правда, небольшие), достаточно похожие на трещину или выбоины на изображении.



а б в г

Рис. 1. Бинаризация дорожного покрытия. а – покрытие хорошего качества, б – покрытие с трещиной; в, г – бинаризованные изображения а и б.

На Рис. 1 приведены примеры покрытий хорошего качества и ДП, имеющего трещины. Можно заметить, что после бинаризации на покрытии хорошего качества видны многочисленные сегменты небольшого размера, среди которых нет явно больших сегментов (мы их считаем артефактами). А на покрытии с трещинами после бинаризации, на фоне многочисленных мелких сегментов отчетливо выделяется конфигурация трещины.

Из приведенных примеров видно, что в алгоритм обнаружения трещин и их различения от артефактов целесообразно включить операции, учитывающие распределение размеров сегментов, получаемых в процессе бинаризации. При этом нужно учесть существующие нормы, устанавливающие вполне определенные требования к качеству ДП, в частности – учитывая удельную площадь трещин и выбоин на покрытии.

В настоящей работе предложена комплексная процедура, основанная на использовании алгоритмов бинаризации и сегментации, позволяющие одновременно оценить необходимый порог бинаризации и соотношение размеров трещин и артефактов.

Предлагаемая процедура основывается на методе полной сегментации [6], примененном определенным образом к бинаризованному изображению с

последующим статистическим анализом характеристик полученных сегментов. Подобный подход ранее был применен к анализу признаков отпечатков пальцев третьего уровня [7].

2. Методика обработки изображения поверхности покрытия

Предварительные замечания. Предлагаемая методика обработки изображения поверхности ДП включает процедуры, основанные на бинаризации и сегментации изображения, расчета и статистического анализа распределения сегментов, классификации сегментов на артефакты и трещины. При этом принимается, что при отсутствии трещин на данном изображении произвольно выбранный сегмент является артефактом, который подчиняется распределению с малым средним значением, в то время как сегменты, представляющие трещину, имеют распределение со значительно бо′льшим средним значением. Другими словами, распределения размеров сегментов внутри этих классов значимо отличаются, что позволяет «отфильтровать» на рассматриваемом изображении сегменты с малыми размерами и таким образом выделить сегменты, представляющие трещины.

Следует отметить, что конечный результат классификации в полной мере определяется результатом бинаризации изображения, поэтому в настоящей работе мы основываемся на определенных требованих к качеству ДП, регламентируемые установленными нормами [8].

Анализ и сопоставление существующих норм не входит в задачу настоящей статьи. Однако для фиксированного требования нормы качества конкретного типа ДП мы вводим *обобщенный параметр* α_b, обозначающий долю всех обнаруживаемых после бинаризации «черных» пикселов в общем количестве пикселов рассматриваемого изображения. Смысл параметра α_b состоит в том, что предварительно фиксируется множество тех пикселов, которые, будучи связанными между собой, образуют все «черные» сегменты изображения. В зависимости от структуры ДП, эти сегменты впоследствии будут классифицироваться как артефакты или трещины.

Отметим, что предложенный подход позволяет избежать отмеченных выше трудностей выбора метода бинаризации.

Описание методики обработки. Методика включает следующие шаги.

Шаг 1. Производится бинаризация изображения с порогом t_b. Порог бинаризации t_b определяется по гистограмме интенсивностей пикселов данного изображения в соответствии со значением параметра α_b.

Шаг 2. Производится полная сегментация бинаризованного изображения. Сегментом считается любое множество «черных» пикселов, каждый из которых имеет хотя бы один соседнего пиксела из того же множества.

Прежде, чем перейти к описанию остальных шагов методики, заметим, что задача классификации, в конечном счете, сводится к нахождению порогового значения размера сегмента, делящего все сегменты на два класса – на артефакты и трещины, т.е. на сегменты с малым и большим количеством пикселов. Обозначим это пороговое значение через T_s. Сегменты, количество пикселов которых меньше T_s, в совокупности характеризуют поверхность ДП, на которой нет трещин, а остальные сегменты характеризуют существующие на ДП трещины.

Пороговое значение T_s может быть рассчитано несколькими способами, в зависимости от различных условий задачи. В работе принят простейший подход, основанный на правиле «трех сигм», т.е. применяется формула $T_s = \hat{\mu}_b + 3\hat{\sigma}_b$, где $\hat{\mu}_b$ и $\hat{\sigma}_b$ – выборочные оценки среднего и СКО размеров всех найденных сегментов.

Шаг 3. Оценивается пороговое значение T_s и выделяются все большие сегменты (трещины). Оценивается доля площади изображения, занимаемой трещинами, по формуле:

$$\mathrm{D\%} = \frac{\mathrm{K_{seg}}}{\mathrm{N}} * 100, \qquad (1)$$

и условный показатель качества ДП $Q\% = 100 - D\%$, где K_{seg} общее количество пикселов выделенных сегментов, N – количество пикселов обрабатываемого изображения.

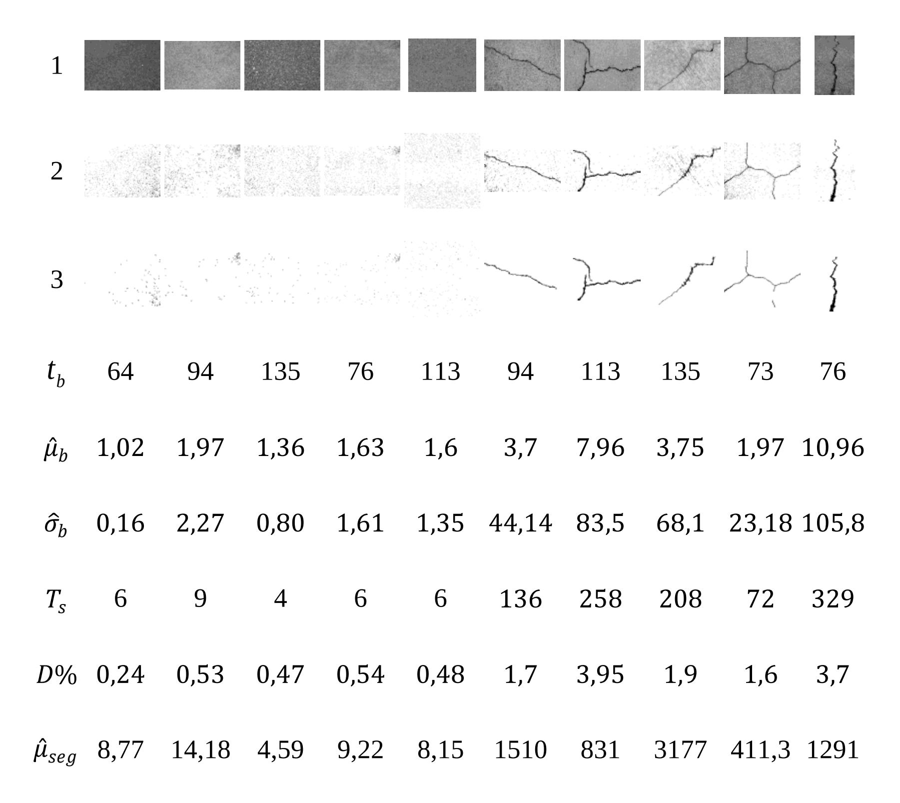
Отметим, что формула (1) не характеризует все возможные типы дефектов ДП, однако тот факт, что предложенная процедура позволяет исследовать все получаемые сегменты вместе или в отдельности, открывает возможности для более полного оценивания состояния ДП. Например, определенную информацию о качестве ДП несет параметр $\hat{\mu}_{seg}$, который вычисляется усреднением размеров выделенных трещин.

3. Результаты экспериментов

Для иллюстрации работы предложенных процедур и интерпретации полученных результатов выполнена серия экспериментов с реальными изображениями, содержающими или не содержающими трещины. Изображения

подобраны с примерно одинаковыми условиями освещенности и однородности участков поверхности.

Таблица 1. Результаты обработки изображений ДП без трещин (первые 5 изображений) и с трещинами (последние 5 изображений)



t_b	64	94	135	76	113	94	113	135	73	76
$\hat{\mu}_b$	1,02	1,97	1,36	1,63	1,6	3,7	7,96	3,75	1,97	10,96
$\hat{\sigma}_b$	0,16	2,27	0,80	1,61	1,35	44,14	83,5	68,1	23,18	105,8
T_s	6	9	4	6	6	136	258	208	72	329
$D\%$	0,24	0,53	0,47	0,54	0,48	1,7	3,95	1,9	1,6	3,7
$\hat{\mu}_{seg}$	8,77	14,18	4,59	9,22	8,15	1510	831	3177	411,3	1291

В Табл.1 приведены использованные материалы и соответствующие результаты обработки при помощи описанной выше методики при $\alpha_b = 0.05$. В первой строке матрицы показаны изображения без трещин (первые 5 кадров) и с трещинами (последующие 5 кадров). Вторая строка представляет результаты сегментации бинаризованного изображения при пороговом значении t_b (соответствующие пороговые значения приведены в строке Таблицы, обозначенной t_b). На изображениях с трещинами отчетливо видны конфигурации трещин, а на изображениях без трещин наблюдается более или менее ярко выраженная однородность полученных сегментов по их размерам. Об этом свидетельствуют также значения выборочных среднего $\hat{\mu}_b$ и СКО $\hat{\sigma}_b$ размеров сегментов, приведенных в соответствующих строках Табл. 1.

В третьей строке Табл. 1 показаны результаты классификации сегментов на два класса. В данном примере классификация производится при помощи простого правила «трех сигм», т.е., если размер сегмента превышает границу $T_s = \hat{\mu}_b + 3\hat{\sigma}_b$, то этот сегмент относится к классу трещин. В противном случае, сегменты считаются артефактами. Пороговые значения T_s для размеров сегментов рассматриваемых изображений приведены в строке, обозначенной T_s. Средний размер выделенных сегментов (т.е. сегментов с размерами, превышающими порог T_s), приведен в строке, обозначенной $\hat{\mu}_{seg}$.

Визуально сравнивая изображения, приведенные в первых трех строках Табл. 1, мы видим достаточно хорошее согласие этих изображений между собой и четкое выделение существующих трещин.

Далее, в строке $D\%$ приведены относительные значения площади, занимаемой трещинами. Как и следовало ожидать, качество ДП в первых пяти кадрах (трещины отсутствуют) значительно выше, чем в последующих пяти кадрах, в которых наблюдаются трещины.

Таким образом, предложенная процедура анализа и классификации трещин на изображениях ДП позволяет не только выделить конфигурацию и расположение трещин, но и оценить ряд важных числовых величин, характеризующих качество ДП.

4. Выводы

Предложенная процедура морфологического анализа и оценивания качества ДП основана на использовании алгоритмов бинаризации и полной сегментации изображения с учетом требований существующих норм. Обработка размеров сегментов, получаемых в результате этих операций, позволяет производить классификацию сегментов на артефакты и трещины и рассчитать их характеристики. На экспериментальном материале показано, что введенный параметр качества адекватно характеризует степень присутствия дефектов на поверхности ДП.

Предложенная методика может быть использована в системах автоматического обнаружения и распознавания дефектов ДП при мониторинге эксплуатируемых дорог.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shimamura H., Oonuma K., Yasuda Y.* Image Analysis for Automated Pavement Cracking Evaluation. MVA'94 IAPR Workshop on Machine Vision Applications Dec. 13–15. 1994, Kawasaki. PP. 83–86.

2. *Nguyen T.S., Avila M. and Begot S.* Automatic defect detection on road pavement using anisotropy measure, in Proceedings EUSIPCO. 2009.

3. *Fu Z.L.* Some New Methods for Image Threshold Selection. Computer Application, 2000, 20(10): 13–15.

4. *Otsu N.* A Threshold Selection Method from Gray-level Histograms, IEEE Trans. Syst. ManCybern, 1979, 9: 62–66.

5. *Sezgin M., Sankur B.* Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation. Journal of Electronic Imaging 13(1), 146–165 (January 2004).

6. *Asatryan D.G., Sazhumyan G.S., Shahverdyan H.S*. Technique for Coherent Segmentation of Image and Applications. Mathematical Problems of Computer Science, IIAP, Yerevan, Armenia, Vol. 28, 2007. PP. 88–93.

7. *Asatryan D., Sazhumyan G.* Segmentation Based Fingerprint Pore Extraction Algorithm. International Journal «Information models and Analysis», Vol. 1. PP. 134–138, 2012.

8. http://docs.cntd.ru/document/1200044969

IMAGE MORPHOLOGICAL ANALYSIS AND PAVEMENT QUALITY ASSESSMENT METHOD

D. Asatryan, G. Hakobyan

SUMMARY

The morphological analysis of pavement structure and quality assessment is an important scientific and technical problem which relies on the joint application of various technical resources of investigation and modern methods of image processing. The main procedures of the analysis, defect detection and quality evaluation of pavement are using algorithms of image binarization, segmentation, edge detection and statistical methods of data processing. In this paper special algorithms of binarization and segmentation, as well as a method for segment classification to Artefacts and cracks, is proposed. Based on real experimental data, statistical calculations have been made which show the effectiveness of the proposed procedures.

Keywords: pavement, crack, quality, binarization, segmentation, classification.

ՃԱՆԱՊԱՐՀԱՅԻՆ ԾԱԾԿՈՒՅԹՆԵՐԻ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ ՄՈՐՖՈԼՈԳԻԱԿԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՈՐԱԿԻ ԳՆԱՀԱՏՄԱՆ ՄԵԹՈԴ

Դ.Գ. Ասատրյան, Գ.Հ. Հակոբյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ճանապարհային ծածկույթների (ՃԾ) կառուցվածքի և որակի ձևաբանական վերլուծությունը կարևոր գիտատեխնիկական խնդիր է, որը հիմնված է տարբեր հետազննական տեխնիկական միջոցների և պատկերների մշակման մեթոդների միասնական կիրառման վրա: ՃԾ վերլուծության, արատների հայտնաբերման և վիճակի գնահատման հիմնական ընթացակարգերը օգտագործում են երկակիացման, հատվածավորման, պատկերում եզրերի և սահմանների հայտնաբերման ալգորիթմներ և տվյալների մշակման վիճակագրական մեթոդներ: Սույն աշխատանքում առաջարկվել են երկակիացման և հատվածավորման հատուկ ալգորիթմներ, ինչպես նաև հատվածների՝ արտեֆակտների և ճեղքերի դասակարգման մեթոդ: Իրական փորձնական նյութերի վրա կատարվել են վիճակագրական հաշվարկներ, որոնք ցույց են տալիս առաջարկվող ընթացակարգերի արդյունավետությունը:

Հիմնաբառեր՝ ճանապարհային ծածկույթ, ճեղք, որակ, երկակիացում, հատվածավորում, դասակարգում:

УДК 539.3 Поступила 20.03. 2015г.

ВОЛНЫ В УПРУГОМ СЛОЕ СО СТЕСНЕННЫМ СКОЛЬЖЕНИЕМ ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТИ

В.Г. Гараков

к.ф-м.н, снс (Институт Механики НАН РА garakov@yandex.ru)

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается новый вариант граничных условий, учитывающих стеснение (сопротивление) скольжению границы волновода. Получены фазовые скорости распространения волн и условия относительно частот колебаний, при которых волны не могут распространяться.

Ключевые слова: волновод, фазовая скорость, дисперсионная волна.

Исследованию плоских волноводов с классическими граничными условиями на плоскостях, ограничивающих волновод (свободная граница, закрепленная, Навье, анти-Навье или скользящий контакт), посвящены многие работы [1]. Имеются несколько статей с другими граничными условиями, которые могут учитывать либо упругое закрепление на границе, либо трение, либо какое-либо стеснение и т.д. Из последних работ по этой теме следует отметить статьи [2–5].

В настоящей статье предлагается новый вариант граничных условий, учитывающих стеснение (сопротивление) скольжению границы волновода. Получены фазовые скорости, распространение волн и условия относительно частот колебаний, при которых волны не могут распространяться.

1. В прямоугольной декартовой системе координат $(x,\ y,\ z)$ упругий слой занимает область: $(-\infty < x < \infty,\ \ -h \le y \le h,\ \ -\infty < z < \infty)$.

Рассматривается распространение волн при условиях задачи плоской деформации

$$u = u(x,\ y,\ t), \quad \mathrm{v} = \mathrm{v}(x,\ y,\ t), \quad w \equiv 0 \tag{1.1}$$

Известно, что введением функций потенциала

$$u =, \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \mathrm{v} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1.2}$$

уравнения, определяющие распространение волн, приводятся к виду (1)

$$c_e^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad c_t^2 \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{1.3}$$

В (1.3) Δ–двумерный оператор Лапласа, c_e, c_t – скорости распространения продольных и поперечных волн.

Предполагается, что на поверхностях ограничивающих слой имеют место следующие граничные условия:

$$\mathrm{v} = 0, \quad \sigma_{yx} = \mp \beta_1 u \tag{1.4}$$

Из (1.4), в частном случае, $\beta_1 \to \infty$ получаются условия закрепленного края, а в случае $\beta_1 = 0$– условия скользящего контакта. Поэтому для условий (1.4) используется выражение «стесненное скольжение».

Решения уравнений (1.3) представляется в виде гармонических волн распространяющихся вдоль координаты x

$$\varphi = f(y) \exp i(\omega t - kx), \quad \psi = g(y) \exp i(\omega t - kx) \tag{1.5}$$

Подстановка (1.5) в уравнения (1.3) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно функции $f(y)$ и $g(y)$. Общие решения этих уравнений имеют вид:

$$\begin{aligned} f(y) &= A_1 \cos k v_1 y + A_2 \sin k v_1 y \\ g(y) &= B_1 \cos k v_2 y + B_2 \sin k v_2 y \end{aligned} \tag{1.6}$$

где

$$v_1 = \sqrt{\theta \eta - 1}, \quad v_2 = \sqrt{\eta - 1}, \quad \theta = c_t^2 / c_e^2, \quad \eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_t^2} \tag{1.7}$$

Решения (1.6), в соответствии с граничными (1.4) и аналогично задаче Рэлея для слоя, разделяются на симметричные и антисимметричные колебания. Симметричные решения удовлетворяют условиям

$$\mathrm{v} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \text{ при } y = 0. \tag{1.8}$$

Нетрудно показать, что для гармонических волн типа (1.5), условия (1.8) эквивалентны условиям [6]

$$\partial\varphi/\partial y = 0, \quad \psi = 0 \text{ при } y = 0. \tag{1.9}$$

Условия для антисимметричного решения следующие:

$$\sigma_{yy} = 0, \quad u = 0 \text{ при } y = 0, \tag{1.10}$$

что эквивалентно условиям

$$\varphi = 0, \quad \partial\psi/\partial y = 0 \text{ при } y = 0. \tag{1.11}$$

2. Из (1.5), (1.6), (1.9) следует, что для симметричного случая

$$f(y) = A_1 \cos kv_1 y, \quad g(y) = B_1 \sin kv_2 y \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1), с учетом (1.5), в граничные условия (1.9), получим однородную систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1, B_1. Равенство нулю в детерминанте этой системы дает дисперсионное уравнение

$$v_1\eta tgv_1\xi tgv_2\xi + \beta k^{-1}\left(tgv_2\xi + v_1v_2 tgv_1\xi\right) = 0, \tag{2.2}$$

где

$$\xi = kh, \quad \beta = \beta_1/\mu. \tag{2.3}$$

В приближении ξ^2 << 1 уравнение (2.2) приводится к виду

$$v_2\eta\left[(\theta\eta - 1)\xi - k^{-1}\beta\theta\right] = 0 \tag{2.4}$$

Нетрудно проверить, что корни уравнения (2.4) $\eta = 0, \quad \eta = 1 \ (v_2 = 0)$ приводят к тривиальному решению задачи – $u \equiv 0, \ \mathrm{v} \equiv 0$. Следовательно, решение уравнения (2.4) будет

$$\eta = \theta^{-1} + \beta k^{-1}\xi^{-1} \text{ или } \omega^2 = k^2 c_e^2 + \beta/h. \tag{2.5}$$

Определение волнового числа из (2.5)

$$k = \pm c_e^{-1}\sqrt{\omega^2 - \beta/h}. \tag{2.6}$$

показывает, что волны с частотой $\omega^2 \le \beta h$ не могут распространяться.

Для произвольных ξ частоты колебаний следует найти из численного решения дисперсионного уравнения (2.2).

В случае антисимметричных колебаний (1.11) функции f и g определяются следующим образом:

$$f\left(y\right)=A_2\sin kv_1 y,\quad g\left(y\right)=B_2\cos kv_2 y \tag{2.7}$$

Подстановка (2.7), с учетом (1.5), в граничные условия (1.11) приводит к следующей системе уравнений относительно произвольных постоянных $A_2,\ B_2$

$$\begin{aligned} &v_1 A_2\cos v_1\xi+iB_2\cos v_2\xi=0\\ &i\beta k^{-1}A_2\sin v_1\xi+B_2\left(\beta k^{-1}v_2\sin v_2\xi+\eta\cos v_2\xi\right)=0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.8) дает уравнение, определяющее параметр фазовой скорости:

$$v_1\eta+\beta k^{-1}\left(\operatorname{tg}v_1\xi+v_1v_2\operatorname{tg}v_2\xi\right)=0\,. \tag{2.9}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Miklowitz J.* The theory of elastic waves and waveguides. Amsterdam, N.Y. Oxford, North-Holland 1984, 618 p.
2. *Белубекян М.В.* Волна Рэлея в случае упруго-стесненной границы // «Известия НАН Армении: Механика». 2011. Т.64, № 4. СС. 3–6.
3. *Ардазишвили Р.В.* Трехмерная волна Рэлея в случае смешанных граничных условий на поверхности полупространства // В сб. «Механика» (посв. 70–летию НАН Армении). Ер.: Изд-во ЕГУАС, 2013. СС. 74–78.
4. *Мелконян А.В., Саркисян С.В.* Применение интегрального преобразования Радона в задаче о распространении волн в полупространстве // В сб. «Механика» (посв. 70-летию НАН Армении). Ер.:, Изд-во ЕГУАС, 2013. СС. 181– 184.
5. *Шульга Н.А., Григорьева Л.О., Кириченко А.А.* Нестационарные упруго-электрические колебания полого шара с импедансными граничными условиями // «Прикладная механика», 2014. Т. 50, № 3. СС. 54–60.
6. *Белубекян М.В., Давтян А.А.* Упругие волны в системе слой–полупространство при условиях скользящего контакта на плоскостях ограничивающих слой // В сб. «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (посв. 100-летию ак. Н.Х. Арутюняна). Ер.: Изд-во ЕГУАС, 2012. Т.1. СС. 116–120.

WAVES IN AN ELASTIC LAYER WITH CONSTRAINED SLIDING ALONG THE SURFACE

V. Garakov

SUMMARY

The phase velocity of the waves and the oscillation frequency conditions where waves cannot propagate are obtained. In particular, it is shown that in long approximation waves with a frequency of $\omega^2 \le \beta h$ cannot be distributed.

Keywords: waveguide, phase velocity, dispersion wave.

ԿԱՇԿԱՆԴՎԱԾ ԵԶՐՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏՈՒՄ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ

Վ.Գ. Գարակով

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ստացված են ալիքների տարածման ֆազային արագությունը և պայմաններ՝ կապված տատանումների հաճախականություն-ների հետ, որոնց դեպքում ալիքները չեն տարածվում: Մասնավո-րապես ցույց է տրված, որ երկար ալիքների մոտավորության դեպքում $\omega^2 \le \beta h$ հաճախականությունով ալիքները չեն տարած-վում:

Հիմնաբառեր՝ ալիքատար, ֆազային արագություն, դիսպերսիոն ալիք:

УДК 62-50

STOCHASTIC DISCRETE EVENT SIMULATION MODEL FOR ESTIMATING PRODUCT DEVELOPMENT TIME

A. Mkrtchyan

Massachusetts Institute of Technology Cambridge, MA 02139, USA
armen@mit.edu

SUMMARY

Efficient development of products is critical to the success of many firms. The literature on product development often discusses the seemingly emergent nature of product development processes in various settings and organizations but does not adequately address the lack of planning tools within these organizations. This paper aims to fill the gap in tool support for the planning process by developing a discrete event simulation model to compute lead times of product development projects. The model explicitly captures various tasks, teams, and developers within a distributed product development setting. This work captures the iterative nature of the product development process and specifies the contextual relationships among tasks and among developers. The model was validated on a previously collected data set, as well as using data from an ongoing project with a small-sized software firm. The model has been encapsulated into a tool using an easy-to-use desktop and iPhone / iPad applications.

1. Introduction

The economic success of most firms depends on their ability to identify the needs of customers and introduce new products over time [1], [2]. The goal of the product development (PD) process is to create these products. PD is defined as the set of activities beginning with the perception of a market opportunity and ending in the production, sale, and delivery of a product [3]. In today's environment of rapidly evolving customer preferences, speed and flexibility in developing new products is even more important [4].

Furthermore, geographically distributed PD is increasingly becoming more popular [5], [6]. Various researchers have noted the importance of developing products in distributed fashion (e.g., [7]) and with the emergence of reliable electronic-based communication media, firms are embracing distributed PD. Sproull

and Kiesler[8] note that information technology (IT) reduces the dependence on traditional face-to-face communications and creates "networked organization." Hence, this paper investigates and presents a simulation model to enhancedistri-buted PD processes.

2. Model Description

This model employs a queuing-based discrete event simulation (DES) to estimate the lead time of product developmentprojects. While in some circumstances it is possible to formulate the PD process as a mathematical optimization problem, the complexity of real-world PD processes makes raw optimization computationally unviable. In DES systems utilized in this paper, time advances in discrete steps defined by elapsed time between events [9], hence, components of the system do not need to be scanned during times between events [10]. To build the DES model, the main attributes affecting PD processes were considered (discussed further by Krtchyan and Srinivasan[11]). These attributes along with the requisite modeling variables are shown in Table I.

TABLE I. PD attributes and corresponding modeling variables.

PD Attribute	Variables
Task structure	• Task duration, T_d^i • Task type &taskassignments, T_t^i
Team structure	• Number of teams, N_F • Number of developers per team, N_F^D
Developerflexibility	• Developerworkhours, D_h • Developerwork type, D_t
Rework	• Reworkimpact, $K_{i_q}^{j,rework}$. • Reworkprobability, $R_{i_q}^{j,rework}$
Taskrelatedness	• Taskdependency, $T(i,j)$ • Taskoverlap, $O(i,j)$
Learning	• Productivity, P_D • Learning curve, L_D&L_T^{min}
Team coordination	• Coordination cost, ΔS_i^{Cross}

This DES model has four interconnected components as shown in Figure 1. First, the task model describes the initial tasks, including task types, duration, and dependency between tasks. Next, the task rework model represents the rework structure. This includes rework probabilities, i.e., probability that one task causes rework for another task, and rework impact, which indicates rework duration. The third component is the developer model, which describes attributes pertaining to developers. These attributes are the number and type of developers, team assignments, productivity level, learning curve, developer priority, coordination cost, and work hours. The last component is the queue, which stores the tasks before they are serviced by the developers.

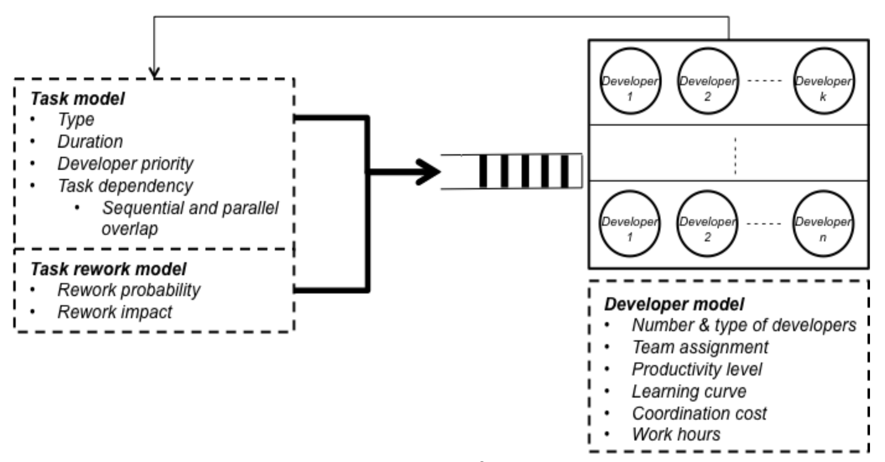


Figure1. High-level representation of the model.

Queuing-based DES models have been used extensively in a variety of domains, such as manufacturing, human supervisory control [12], hospitals [13], finance [14], and air traffic control [15]. DES models have also been successfully used to model different aspects of PD. For example, Adler et al. [16] utilized DES technique to model workflow management, while Browning and Eppinger[17] modeled the impact of process architecture on PD schedule. The variables identified above were incorporated into the DES model, which is described in the next sections.The model has been implemented both in the form of a desktop application running on Mac OS, as well as an iPad application. A sample screenshot of the MacOS application, called SimLink™is shown in Figure 2.

2.1. Model Structure

All of the model components are described below, along with input data required to run the model.

2.1.1. Tasks

There are two general categories of tasks. The first category represents the initial tasks that need to be completed. These are the tasks that the manager thinks need to be completed for a given project to succeed. The next category of events represents the tasks that are the result of the rework caused by incomplete information at the time of initial task breakdown and planning.

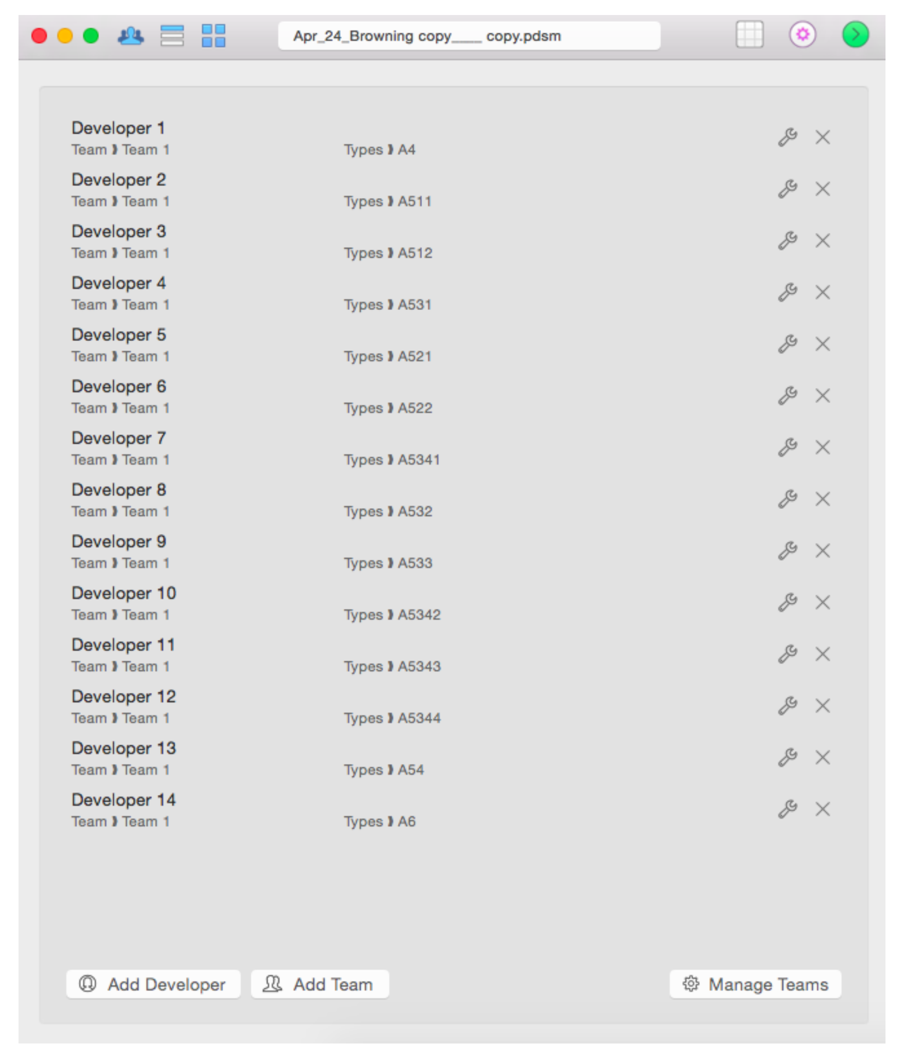


Figure 2: Sample screenshot of SimLink™ application.

Initial tasks

Initial tasks are pre-programmed in the system. Each task has its associated type and duration. When compiling a list of initial tasks, task dependencies are also

specified. More specifically, the degree to which tasks can be processed in parallel and whether starting one task is dependent on finishing another are specified.

Rework generated tasks

The iteration of design/development tasks is critical to any PD process [18]. While product quality generally improves with each successive iteration, it also contributes significantly to the cost and completion time of a project [10]. Much of the rework is caused by changes in information and/or assumptions upon which they were initially executed. In this model, rework is taken into account using a design structure matrix (DSM) methodology to represent the probability that a rework is required, as well as the impact that the rework will have. These concepts are explained in more detail in the *Arrival Processes* and *Service Processes* sections.

2.1.2. Arrival Processes

Each task in a DES simulation has associated interarrival time, which describes the arrival of successive tasks. Arrivals can occur at random times or at scheduled times. When at random, the interarrival times are usually characterized by a probability distribution [9]. The arrivals can also be either independent or dependent. In this model, arrivals can be dependent based on when other tasks are serviced, which can be the same or have a different task type. To model the dependency of tasks, information flow between tasks is specified through a DSM. Servicing a task can trigger other tasks based on the dependency DSM, which is discussed in the next sections. The newly triggered tasks subsequently enter the queue and are later serviced according to the queue discipline. Servicing a task can also cause other tasks to be unblocked, i.e. these tasks are allowed to leave the queue and be serviced. To model the blocking/unblocking [19], the flow of certain tasks in the queue is temporarily stopped until a condition is met (e.g. another task is serviced). The concept of dependency is extended in this model to account for tasks that may be unlocked after a certain percentage of a different task is finished, without waiting for the task to be fully completed (e.g. dependency of initial tasks, as described below).

Initial task interarrival times

The interarrival time of initial tasks is not explicitly modeled because availability of developers and dependency between tasks dictate when the initial tasks are serviced. To model dependency between tasks, information flow from task i to task j is specified through a dependency matrix D. $D(i,j)$ is zero when there is no information flow from task j to task i and the two tasks can be processed in parallel. $D(i,j)$ is one when there is information flow from task j to task i and the two tasks are either processed sequentially or there can be some overlap. To specify the level of overlap between tasks j and i, an overlap matrix O is used. $O(i,j) = b$

implies that task i can be serviced before task j has been completed and the level of overlap is $T(j) \cdot b$, where $T(j)$ is the initial duration of task j.

Rework task interarrival times

Arrival of tasks associated with rework is modeled using a rework probability matrix $R_{i_q}^{j,rework}$, which indicates probabilities that task j causes rework for task i during qth iteration. More specifically, the value of $R_{i_q}^{j,rework}$ implies whether rework is caused for task i after qth iteration of task j, i.e., the value of $R_{i_q}^{j,rework}$ is the success probability of the Bernoulli distribution.

2.1.3. Service Processes

Similar to arrival processes, service processes can also be either constant or of random duration. Also, different tasks can have different service times (or probability distributions).

Initial task service times

To indicate the duration of initial tasks, the model allows product/project managers to input their pessimistic(p), likely (l), and optimistic (o) estimates. Specifically, a time duration matrix $T_d(j) = (p, l, o)$ uses the latin hypercube sampling (LHS) method to generate expected values for the duration of task j. Latin hypercube sampling has been shown to have a better convergence rate compared to a more popular random sampling method [20], [21]. Since the estimate of initial service times of tasks is usually carried out by project managers based on their prior experience, this model captures the 10th percentile of the expected duration, the mode and the 90th percentile of the expected duration of a task as(p, l, o). It has been shown that the 10th and 90th percentiles of the expected duration are easier for humans to estimate than the 0th and 100th percentiles of the probability distribution function (PDF) of expected durations [10].

For each task j, its pessimistic, likely and optimistic duration estimates can be used to generate a PDF $f_{\Xi_j}(\xi)$. Specifically, given the 0^{th} (a) and 100^{th} (b) percentiles for task durations, as well as the mode (c), the PDF of a triangular distribution can be constructed. In fact, given $\begin{cases} a: -\infty < a < \infty \\ b: a < b \\ c: a \leq c \leq b \end{cases}$, one can write the PDF of a triangular distribution as follows:

$$f_{\Xi}(\xi) = \begin{cases} 0, for\ \xi < a\ or\ \xi > b \\ \dfrac{2(\xi - a)}{(b-a)(c-a)}, for\ a \leq \xi \leq c \\ \dfrac{2(b-\xi)}{(b-a)(b-c)}, for\ c < \xi \leq b \end{cases}$$

To find a, c, b from known estimates of p, l, o, the following system of equations has been derived by Mkrtchyan[22]:

$$\begin{cases} (1+z)^2 + (1+w)^2 = 10 \\ \frac{1}{l-o} z(z+1) = \frac{1}{o-l} w(1+w) \end{cases}$$

Using a publicly available library for numerical analysis and taking into account initial conditions (i.e., $z > 0, w > 0$), the values of z and w can be computed for any estimates of p, l, o. Next it can be shown that $a = o - \frac{1}{z}(l-o)$ and $b = p + \frac{1}{z}(p-l)$, while $c = l$[22].

Latin hypercube sampling (LHS)

To generate task duration samples when running the simulation model, the LHS method is used. LHS is a type of stratified sampling [21], [23] and it operates in the following way when sampling data for K tasks. The range spaces for each component of ξ, i.e., $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K$ is split into M disjoint intervals (also known as stratas) on the basis of equal probability size, where M is the number of simulation iterations. In this case, each disjoint interval has a probability size of $1/M$. One value from each interval is selected randomly. Hence, M values are obtained for each component of ξ. Lastly, M values from ξ_1 are randomly combined with M values of $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_K$ to form MK-tuples. The set of K-tuples is also known as Latin hypercube sampling. Therefore, for given M and K, there exist $(M!)^{K-1}$ interval combinations for a Latin hypercube sampling. Furthermore, compared to random Monte Carlo sampling method, LHS has significantly smaller sampling error of $O\left({}^{1}/_{N}\right)$[24], [25]., while the sampling error of Monte Carlo is $O\left({}^{1}/_{\sqrt{N}}\right)$, where N is the number of samples [26]. This means that the sampling error decreases quadratically faster in the case of LHS.

To accomplish the above-described process, an easy to implement method has been proposed, which uses inverse cumulative distribution function (CDF) [27], [28]. First, the interval [0,1] is divided into M intervals. Next, the midpoint of each interval is determined. Afterward, using inverse CDF, values corresponding to task durations are extracted. Specifically, for a triangular distribution, random variants can be generated as follows knowing the value of $v \in [0,1]$.

$$\begin{cases} \xi = a + \sqrt{v(b-a)(l-a)}, & when\ 0 < v < \frac{l-a}{b-a} \\ \xi = b - \sqrt{(1-v)(b-a)(b-l)}, & when\ \frac{l-a}{b-a} \le v < 1 \end{cases}$$

M samples are generated this way for each component of ξ, which are used to specify task durations for K tasks during M simulation runs. Because this method chooses the midpoint for each of the M intervals, the method is referred to as median Latin hypercube sampling.

Rework service times

Rework service times are modeled as fractions of initial service times. For example, if task i requires a rework, its duration is modeled as a fraction of the initial task, i.e.$S_{i_q}^{rework} = k_{i_q}^{rework} \cdot S_i^{initial}$, where $S_i^{initial}$ is the initial duration of task i and $k_{i_q}^{rework}$ is the fraction of work that needs to be reworked for task i during qth iteration. The values of $k_{i_q}^{rework}$ are extracted from a three-dimensional matrix $K_{i_q}^{j,rework}$, which also includes information about which task (j) causes rework for task i during qth iteration.

2.1.4. Factors impacting service time

While service times are generally extracted from a probability distribution function, they can be further impacted by a variety of factors. Some of the major factors impacting service times are the learning curve, individual developer performance variations, and coordination cost.

The learning curve measures a characteristic of a task when it repeats. This model assumes that the duration of task i decreases by L_i percentage every time task i (or a portion of it) repeats until reaches some L_i^{max}, which is the maximum possible gain from repeating task i.

Another factor that can impact the service time is the individual differences between developers. More specifically, varying levels of developer experience, knowledge, and commitment levels can impact their performance, which in turn impacts task service times. To take this into account, the model allows the project manager to account for performance differences by specifying the performance level for each developer. Specifically, the model assumes a default performance level of 1. If a developer is assumed to have better than average performance, the manager can increase the performance level by increasing the number, e.g., a developer with a performance level of 1.5implies that tasks will be completed 50% faster compared to a developer with a performance level of 1.

Lastly, the model also takes into account coordination cost between developers. The coordination cost refers to the amount of extra time that one developer needs to get accustomed to a task that another developer has been working on. The coordination cost is assumed to be zero for the same person, i.e. when a developer continues his own work there is no extra coordination cost that should be taken into account. Furthermore, the coordination cost is higher for developers that work in different teams and/or in different sites and is generally lower for developers

working side by side in the same team/site. The model accounts for the coordination cost by adding ΔS_i^{Cross} to the service time of task i when a developer from a different team previously worked on the same task. In this case, ΔS_i^{Cross} is known as the cross-site coordination cost for task i.

2.1.5. Team Structure

To account for various team structures and their effect on product development process, the model takes into account the following factors.

Developer types

Developer types can be entered in the model, which is used to allocate tasks from the queue. Since all the tasks have their appropriate types, it is required that all task types have at least one matching developer with the same type. Otherwise, a task will never be serviced, if a developer with the same type does not exist.

Number of developers & priority levels

Developers can be of different type of they can have the same type. If developers have the same type, their priorities can be different. More specifically, two developers can be structural engineers but if one of them has a higher priority, a structural engineering task will be allocated to the developer with the higher priority, if he/she is available.

Work hours

Different teams can have different work hours in the model. This is especially useful when modeling a distributed product development process that includes teams in multiple times zones/countries. Knowing work hours of different teams helps take into account task distributions between developers working in different time zones, as well as modeling the coordination cost between developers.

2.1.6. Queue

Queue serves as a temporary holding place for tasks before developers service them. However, besides serving just as a storage for the tasks, the queue has a discipline, which describes the logical ordering of tasks in a queue. It determines which task will be serviced first when a developer (server) becomes available [9]. There are numerous queue disciplines (e.g., first-in-first-out, service in random order, shortest processing time first) that can be implemented in a DES model. In this model, service according to priority queue discipline is implemented, which allocates the highest priority task to the first available developer of the same task type (with the highest priority).

2.1.7. Servers/Developers

The developers in this model represent the servers of a queuing based DES model. Since developers can work simultaneously, they can be viewed as N parallel servers, where N is the number of developers/servers. Nonetheless, it should be noted that these servers have varying characteristics (e.g. performance ratings,

types of tasks they can service, work hours) and they do not always have to work in parallel. For example, if two developers work on a project that consists of two dependent tasks of different types, then one developer has to wait until the other developer finishes the task. This occurs despite the fact that both developers/servers, in theory, can work in parallel. Another important characteristic that describes the servers are work hours. In this model, the servers only become available during work hours and are inactive otherwise.

3. Model Outputs

The model is able to capture a variety of metrics that are useful for analyzing product development process. Specifically, being a queuing-based DES model, it is easy to capture long-run measures of performance of this queuing system. This metrics are the following: total and average time spent in the queue, total and time-average number of tasks in the queue, utilization of each server. Besides these DES metrics, the model also captures the total time it takes developers to complete all the tasks.

3.1. DES-based metrics

The main steady-state DES-based metrics are (a) the total and average time tasks spend in the queue, (b) total and time-average number of tasks in the queue, (c) average utilization and utilization of each server/developer. In this model, from the steady-state measures mentioned above, utilization can be used as a measure of developer workload. It is calculated as the ratio of the time the developer is busy servicing tasks divided by the total duration of the simulation. For a single server queuing system, the long run server/developer utilization (ρ) is equal to the average event arrival rate (λ) divided by the average service rate (μ).

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

For the queuing system to be stable, the arrival rate must be less than the service rate, i.e. $\lambda < \mu$. If the arrival rate is greater than the service rate, then $\rho = 1$. In real-world situations, this can happen when developers have more tasks than they can service. One way to alleviate the saturation of servers is to increase the number of developers. Since real-world PD projects usually have multiple developers working in parallel, the notion of average developer utilization can also be computed, i.e., the simple arithmetic mean of the developers' utilization.

In this model, average task wait time in the queue is also calculated. To find the average time tasks spend in the queue, we define $W_1^Q, W_2^Q, \dots, W_N^Q$ to be the

time each task spends in the queue, where N is the number of arrivals during $[0, \tau]$. Hence, the average time spent in the queue per event will be:

$$\widehat{w}_Q = \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} W_i^Q$$

As $N \to \infty, \widehat{w}_Q \to w_Q$, where w_Q is the steady-state time spent in the queue. For stable queuing systems, w_Q must be bounded, otherwise wait times will grow indefinitely.

Similarly, let τ_{u} denote the total time during $[0, \tau]$ in which the queue contained exactly u tasks. The time weighted average number of tasks in the queue is defined by:

$$\hat{L}_Q = \frac{1}{\tau}\sum\nolimits_{u=1}^{\infty} i\tau_u^Q = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} L_Q(t)dt$$

As $\tau \to \infty, \hat{L}_Q \to L_Q$, where L_Q is the long-run time-average number of tasks waiting in queue.

3.2. PD specific metrics

Besides these DES metrics, the model also captures the total time it takes developers to complete all the tasks. Note that due to the ability to process tasks in parallel; the total time to service the tasks is generally less than the sum of times each developer spends on servicing tasks allocated to him/her. Assuming τ_L^g indicates the time when the last task in the queue was serviced by a developer during gth run of the model, the following metrics are calculated:

– Minimum project completion time: $\tau_{min} = \min_g(\tau_L^g)$.

– Maximum project completion time: $\tau_{max} = \max_g(\tau_L^g)$.

– Average project completion time: $\tau_{av} = \frac{1}{G}\sum_{g=1}^{G} \tau_L^g$, where G is the total number of simulation runs.

– Standard deviation of project completion time:

$\tau_{SD} = \sqrt{\frac{1}{G}\sum_{g=1}^{G}(\tau_L^g - \tau_{av})^2}$.

– Median value of project completion time:

$\tau_{med} = valueof\tau_{med} forwhichP(X \leq \tau_{med}) = P(X \geq \tau_{med}) = \frac{1}{2}$,

where is$X$ is the random variable representing project completion time after each simulation run.For each simulation run g, τ_D^g is defined as the time spent by developer D on servicing tasks.

The model is able to capture a variety of metrics that are useful for analyzing the PD process. Specifically, being a queuing-based DES model, it is easy to

capture long-run measures of performance of this queuing system. Moreover, the model also captures PD specific metrics.

4. Results

4.1. Unmanned vehicle development project

To validate the model, the SimLink™ application was tested on an existing (also referred to as historical) data set gathered from industry. Specifically, Browning[18] collected information from Boeing on task durations, learning factors, task relatedness, and rework. Table 2 shows task duration estimates. It should be noted that in this case the duration estimates represent the $0th$ percentile, mode, and the $100th$ percentile of a triangular distribution, rather than the $10th$ and the $90th$ percentiles used in the SimLink™ model. Also, in Browning's work resource constraints are not accounted for, hence the tasks can be processed in parallel to the extent allowed by task relatedness. To incorporate this into the SimLink™ model, each task type has its designated developer that can process the task once it arrives in the queue.

Table 2: Task duration estimates for a UV project.

	Durations (days)			
Tasks	*o*	*l*	*p*	**Learning**
A4	1.9	2	3	0.35
A511	4.75	5	8.75	0.2
A512	2.66	2.8	4.2	0.6
A531	9	10	12.5	0.33
A521	14.3	15	26.3	0.4
A522	9	10	11	1
A5341	7.2	8	10	0.35
A532	4.75	5	8.75	1
A533	18	20	22	0.25
A5342	9.5	10	17.5	0.5
A5343	14.3	15	26.3	0.75
A5344	13.5	15	18.8	0.3
A54	30	32.5	36	0.28
A6	4.5	5	6.25	0.7

Next, task relatedness is specified through a DSM, which is shown in Table 3. The values of the DSM indicate information flow between corresponding tasks.

The super-diagonal elements indicate precedence relationships, while the sub-diagonal elements indicate feedback relationships between tasks.

It should be noted that the overlap matrix $O(i,j)$ is zero for this project, since Browning did not collect information and it was assumed that partial task overlap was not applicable.

Similarly, both rework probability and impact matrices[18] were captured and included in the model. After running the model $N = 200$ times, the SimLink™ results for project completion time are the following:

$$\begin{cases} Average = 151.6\ days \\ Standard\ deviation\ (SD) = 15.9\ days \end{cases}$$

Table 3: Task relatedness matrix for UV project.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1														
2	1								1					
3		1		1										
4	1		1											
5	1		1			1		1				1	1	
6	1				1									
7	1					1								
8						1						1		
9	1		1	1				1						
10				1		1	1	1			1			
11						1	1	1		1				
12	1					1	1			1	1			
13	1				1							1		
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

The results are compared to Cho and Eppinger's[10] modeling work, which also utilizes DES simulation and uses Browning's UV data set. Specifically, the results from the previous (simpler) model were:

$$\begin{cases} Average = 146.8 \\ Standard\ deviation = 17.0 \end{cases}$$

The results show that the SimLink™ model in a simple form is able to replicate the results using a historical data set. Also, the PDF of project completion time is positively (right) skewed (Figure 3), which agrees with the results from Cho and Eppinger[10] and Browning [18].

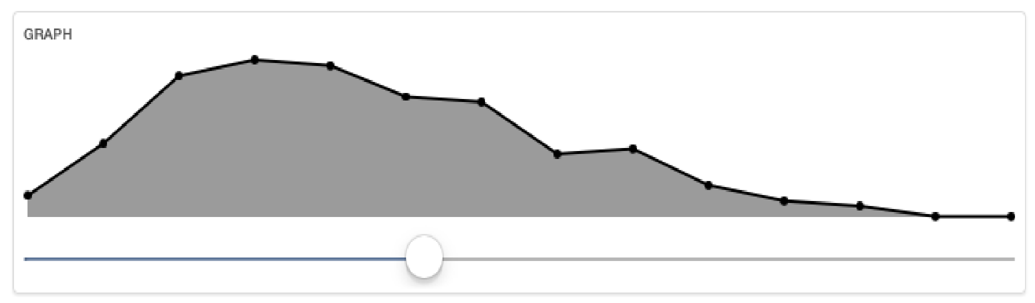


Figure 3: The PDF of project completion time for UV project.

4.2. Mobile software development project

This project is concerned with revising an existing system to better support the growing demands of a small firm's corporate clients. At the time this firm used Pivotal Tracker, an agile project management tool. Some of the information about the project, such as the tasks and developers working on the project were extracted from Pivotal Tracker. The rest of the required information was collected from a team leader responsible for this project. **Ошибка! Источник ссылки не найден.** shows the tasks, their types, and duration estimates.

Four developers were involved in this project. To be more precise, two developers from California and two developers from Armenia worked on the project as a small geographically distributive software development team. The developers had different performance levels, learning curves, and various skills. Table 4 summarizes the main characteristics of developers, as well as typical work hours (indicated in Armenian time).

Table 4: Developer characteristics for mobile soft. dev. project.

Developer	Skills / task types	Pruductivity level	Learning curve	Region	Typical work hours
1	Games back end API integration	0.75	0.2	Armenia	9:00-20:00
2	Customer API	1	0.1	California, USA	20:00-06:00
3	API integration	1.3	0.1	California, USA	20:00-06:00
4	Customer API Advertisement back end Games back end	1.4	0.2	Armenia	9:00-20:00

The remaining modeling parameters, such as task relatedness and rework matrices are shown in Mkrtchyan's work [22].

Before the project was complete, the simulation model was utilized to predict project completion time. Moreover, the timeline was analyzed to identify opportunities to increase team efficiency and compare them with real world observations. The results (Figure 4) show that model predictions for average project completion time was 182.7 with SD of 25.84, while actual project completion time was 168 hours. While actual results were within one SD of model predictions, lower actual project completion time was mainly due to increased concurrency than what was accounted in the model. Specifically, the overlap matrix, $O(i, j)$ was specified as having all zero elements (i.e., tasks that exchange information do not overlap); however, in the real world developers collaborated more than anticipated by the PD manager and some overlap between tasks was present. Still the estimated results were within one SD of the actual project completion time.

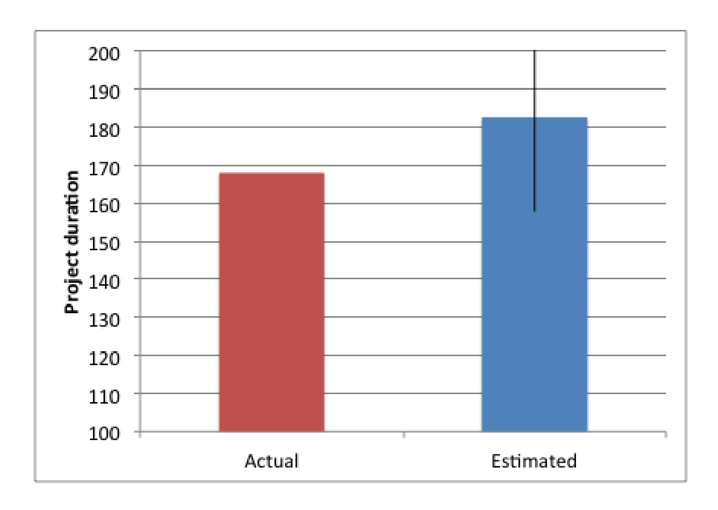


Figure 4: Comparing actual vs. predicted project completion times.

5. Discussion

In general, three key areas for model applications were identified during the development and validation process, which are discussed below.

– *Setting schedule target* is one of the main potential applications of the model. PD managers can evaluate different scenarios and choose one that has an acceptable risk level of schedule overrun. The SimLink™ model can be used to analyze only those PD scenarios that are feasible. For example, knowing how many developers can potentially work on a project, the SimLink™ should be uti-

lized to evaluate only the scenarios that involve these developers, rather than some theoretical schedule tradespace that includes imaginary developers.

– *Process improvement* is another potential application area. Specifically, the model can help identify critical tasks that have significant impact on the PD process. By paying more attention to these tasks and allocating sufficient resources, the PD manager can improve the overall PD process.

– *Research oriented evaluation* has also been identified as a potential application area of the model. There are PD strategies that have been consistently discussed in the PD literature but are usually hard to implement. The model can help quantitatively evaluate the impact of such strategies. For example, preemptive iteration has been suggested to shorten PD completion time by doing more iterations in the beginning of PD projects. While it is often risky to attempt such a strategy, the model can provide a quantitative measure of the expected reduction of PD project completion time.

Another example of a PD strategy that is hard to implement but easy to test with the model is follow-the-sun PD process implementation. Such a strategy requires setting up development activities in different time zones so that PD work can be passed from one time zone to another and effectively continues for 24 hours.

6. Conclusions

In this paper a novel method for predicting distributed PD lead time was presented. The above-described method uses stochastic DES approach to generate probability density functions of lead times. While lead times are one of the main parameters that interest project and product managers, the model can be used to analyze bottlenecks and optimize resources, conduct replanning activities, and improve PD processes in place. Given the level of granularity of the model, it can help small teams conducting PD activities. The modeling approach is valid for any PD process that has one or more teams of developers, including both hardware and software (and mixed) development projects. Furthermore, user-friendly Mac OS® and iOS® applications were developed to allow rapid dissemination of the model and make it easy for product/project managers to learn and use the model effectively.

REFERENCES

1. *D. Dougherty and C. Hardy*, “Sustained product innovation in large, mature organizations: Overcoming innovation-to-organization problems,” *Acad. Manage. J.*, vol. 39, no. 5. PP. 1120–1153, 1996.

2. *E.T. Penrose,* The Theory of the Growth of the Firm. Oxford University Press, 1995.

3. *K.T. Ulrich and S. D. Eppinger*, *Product design and development*, 5th ed. New York: McGraw-Hill, 2012.
4. *H. Takeuchi and I. Nonaka*, "The new new product development game," *Harv. Bus. Rev.*, vol. 64, no. 1. PP. 137–146, 1986.
5. *O. Granstrand, L. Håkanson, and S. Sjölander*, "Internationalization of R&D—a survey of some recent research," *Res. Policy*, vol. 22, no. 5. PP. 413–430, 1993.
6. *A. Griffin*, "PDMA research on new product development practices: updating trends and benchmarking best practices," *J. Prod. Innov. Manag.*, vol. 14, no. 6. PP. 429–458, 1997.
7. *S. Ghoshal and C.A. Bartlett*, "The multinational corporation as an interorganizational network," *Acad. Manage. Rev.*, vol. 15, no. 4. PP. 603–626, 1990.
8. *L. Sproull and S. Kiesler*, *Connections: New ways of working in the networked organization*. MIT press, 1992.
9. *J. Banks, J. Carson II, B. Nelson, and D. Nicol*, *Discrete Event System Simulation*, 5th ed. Harlow England: Pearson Education, 2014.
10. *S.-H. Cho and S. Eppinger*, "Product development process modeling using advanced simulation," 2001.
11. *A. Mkrtchyan and S. Jayakanth*, "Enhancing product development capabilities of SMEs: a study in a less-developed country," presented at the 21st International Product Development Conference, 2014.
12. *A.A. Mkrtchyan*, "Modeling operator performance in low task load supervisory domains," Massachusetts Institute of Technology, 2011.
13. *R. Ceglowski, L. Churilov, and J. Wasserthiel*, "Combining data mining and discrete event simulation for a value-added view of a hospital emergency department," *J. Oper. Res. Soc.*, vol. 58, no. 2. PP. 246–254, 2006.
14. *P.P. Boyle*, "Options: A monte carlo approach," *J. Financ. Econ.*, vol. 4, no. 3. PP. 323–338, 1977.
15. *S. Kapralov and V. Dyankova*, "Modeling a system with discrete events," *Comput. Model. Simul. EMS 2012 Sixth UKSimAMSS Eur. Symp. On*. PP. 167–172, Nov. 2012.
16. *P.S. Adler, A. Mandelbaum, V. Nguyen, and E. Schwerer*, "From project to process management: an empirically-based framework for analyzing product development time," *Manag. Sci.*, vol. 41, no. 3. PP. 458–484, 1995.
17. *T. Browning and S. Eppinger*, "Modeling impacts of process architecture on cost and schedule risk in product development," *Eng. Manag. IEEE Trans. On*, vol. 49, no. 4. PP. 428–442, 2002.
18. *T. Browning*, "Modeling and analyzing cost, schedule, and performance in complex system product development," MIT, Cambridge, MA, 1999.
19. *S. Balsamo, V. de Nitto Personé, and R. Onvural*, Analysis of queueing networkswith blocking, vol. 31. Springer, 2001.

20. *L. Chrisman*, "Latin hypercube vs. Monte Carlo sampling," *Lumina Blog*, 23-Jul-2014. [Online]. Available: http://blog.lumina.com/2014/latin-hypercube-vs-monte-carlo-sampling/. [Accessed: 15-Nov-2014].

21. *M.D. McKay, R. J. Beckman, and W. J. Conover*, "Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code," *Technometrics*, vol. 21, no. 2. PP. 239–245, 1979.

22. *A.A. Mkrtchyan*, "Modeling distributed product development processes in small and medium enterprises," Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 2015.

23. *M. Keramat and R. Kielbasa*, "Latin hypercube sampling Monte Carlo estimation of average quality index for integrated circuits," in *Analog Design Issues in Digital VLSI Circuits and Systems*, Springer, 1997. PP. 131–142.

24. *C. Aistleitner, M. Hofer, and R. Tichy*, "A central limit theorem for Latin hypercube sampling with dependence and application to exotic basket option pricing," *Int. J. Theor. Appl. Finance*, vol. 15, no. 7, 2012.

25. *W.-L. Loh*, "On the Convergence Rate to Normality of Latin Hypercube Sampling U-Statistics," Purdue University, Technical Report 95-2, 1995.

26. *E. Koehler, E. Brown, and S. J.-P. Haneuse*, "On the assessment of Monte Carlo error in simulation-based statistical analyses," *Am. Stat.*, vol. 63, no. 2. PP. 155–162, 2009.

27. *M. Keramat and R. Kielbasa*, "Modified Latin hypercube sampling Monte Carlo (MLHSMC) estimation for average quality index," *Analog Integr. Circuits Signal Process.*, vol. 19, no. 1. PP. 87–98, 1999.

28. *G.D. Wyss and K. H. Jorgensen*, "A user's guide to LHS: Sandia's Latin hypercube sampling software," *SAND98-0210 Sandia Natl. Lab. Albuq. NM*, 1998.

ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ԴԻՍԿՐԵՏ ԻՐԱԴԱՐՁՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՍԻՄՈՒԼՅԱՑԻՈՆ ՄՈԴԵԼ ԱՐՏԱԴՐԱՆՔԻ ՍՏԵՂԾՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿԸ ԳՆԱՀԱՏԵԼՈՒ ՀԱՄԱՐ

Ա.Ա.ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Արտադրանքի արդյունավետ կազմակերպումը կարևոր է բազմաթիվ ընկերությունների համար: Արտադրանքի ստեղծման մասին գրականությունը հաճախ քննարկում է արտադրանքի առերևույթ զարգացման գործընթացների բնույթը տարբեր պայմաններում և կազմակերպություններում, սակայն լիարժեք չի անդրադառնում պլանավորման գործիքների բացակայությանը այդ կազմակերպություններում: Այս հոդվածը նպատակ ունի լրացնել այդ բացը՝ առաջարկելով պլանավորման գործընթացի ստեղծման աջակցությանը նպաստող գործիք՝ օգտագործելով դիսկրետ իրադարձությունների սիմուլյացիոն մոդել: Մոդելը

հստակ ներառում է տարբեր առաջադրանքներ, թիմեր և աշխատակիցներ՝ տեղաբաշխված արտադրանքի ստեղծման շրջանակներում: Այս աշխատանքը հաշվի է առնում արտադրանքի ստեղծման գործընթացի կրկնվող բնույթը և ամրագրում է բովանդակային հարաբերությունները առաջադրանքների և ծրագրավորողների միջև: Մոդելը վավերացվել է նախկինում հավաքագրված տվյալների բազայի հիման վրա, ինչպես նաև՝ օգտագործելով տվյալներ փոքր ծրագրային ընկերության արդիական ծրագրից: Մոդելի հիման վրա ստեղծվել է հեշտ օգտագործվող գործիք, որը կարելի է գործարկել համակարգչով և iPhone/iPad սարքավորումներով:

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬДЛЯ ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ РАЗВИТИЯ ПРОДУКТОВ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНО-СОБЫТИЙНОЙ СИМУЛЯЦИИ

А.А. МКРТЧЯН

АННОТАЦИЯ

Эффективное применение продуктов особо важно для успеха многих фирм. В литературе по применению продуктов часто, казалось бы, обсуждается природа процессов их развития в различных условиях и организациях, но адекватно не говорится об отсутствии инструментов планирования в самих организациях. Целью данной статьи стало восполнение пробелов в поддержке инструментов для планирования с помощью создания моделей дискретных событий для того что бы рассчитать время, необходимое для выполнения новых проектов. Модель тщательно фиксирует разные задачи, группы и разработчиков в рамках распределенной установки разработки продукта. Это процедура фиксирует повторяющуюся природу процессов развития продуктов и указывает на контекстуальные соотношения между задачами и разработчиками. Модель была подтверждена на ранее собранном наборе данных с помощью использования данных текущих проектов, взятых у малых фирм программного обеспечения. Модель преобразована в инструмент, который легко использовать как на мониторе компьютера, так и наприложениях i Phone/iPod.

ФИЗИКА

Поступила 24.03.2015г.

СИНГУЛЯРНЫЙ СФЕРИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ: ПРИТЯЖЕНИЕ

Г. Багунц, Г. Габриелян

Арцахский государственный университет, Степанакерт
e-mail: shayk@ysu.am

АННОТАЦИЯ
Построены классические решения сферического обобщения двумерного сингулярного осциллятора, взаимодействующего с постоянным магнитным полем для случая, когда сингулярность задается центростремительным потенциалом. Показано, что помимо основного решения, имеюшего планарный предел, система допускает дополнительные решения не имеющие аналогов на плоскости.
Ключевые слова: сингулярный осциллятор, магнитное поле.

1. Введение

Осциллятор является системой, выделенной во многих отношемниях. Прежде всего, он выделен наличием широкой алгебры симметрий, *su(d),* где d есть размерность пространства [1]. Кроме того, наряду с задачей Кулона, он отличается тем, что все его траектории замкнуты [2]. Наличие широкой алгебры симметрий позволяет во многих случаях вводить взоимодействие осциллятора с внешними полями, оставляя систему интегрируемой. Простейшим и важнейшим примером такого рода является двумерный осциллятор в постоянном магнитном поле. Наконец, имеется обобшения осциллятора на искривленные пространства. Наиболее известное обобщение такого было предложено Хиггсом [3] для осциллятора на d-мерной сфере радиуса r_0. Она задается потенциалом

$$V_{osc} = \frac{\alpha^2 r_0^2 \tan^2\theta}{2} \qquad (1.1)$$

где $\tan\theta = |\boldsymbol{x}| / x_{d+1} /$, а $\boldsymbol{x},\ x_{d+1}$ есть эвклидовы координаты объямлющего пространства R^{d+1}: $\boldsymbol{x}^2 + x_{d+1}^2 = r_0^2$. Наряду с обобщением задачи Кулона на сфере [4], он выделен тем, что все его траектории замкнуты. Отметим, что обе эти системы обладают нелинейными алгебрами скрытых симметрий, и в основном наследуют характерные свойства стандартных задач осциллятора и Кулона.

Однако осциллятор Хиггса плох тем, что в присутствии постоянного магнитного поля перестает быть точнорешаемой системой, что сильно приуменьшает его практическую важность. Дело в том, что системы на сфере имеют не только академический, но прикладной смысл. Во-первых, модель частицы на двумерной/четырехмерной сфере, движущейся в постоянном магнитном/инстантонном поле, является основой, на которой строится теория двумерного и четырхмерного эффектов Холла (см., соответственно, [5, 6]). Во-вторых, системы на сферах могут интерпретироваться как системы с зависящей от положения эффективной массой. И, наконец, они могут аппроксимировать движение реальных частиц в тонких сферических пленках, и имеют отношение к физике наноструктур.

Потому важно найти другие обобщения осциллятора на сфере, остающейся интегрируемыми в присутствии магнитного поля. Такие обобщения были рассмотрены в цикле работ [7,8,9,10,11]. Потенциал указанных моделей, выглядит так

$$V_{BN} = 2\alpha^2 r_0^2 \tan^2\frac{\theta}{2} \qquad (1.2)$$

С другой стороны, общеизвестно, что двумерный осциллятор, задаваемый потенциалом

$$V_{SW} = \frac{\alpha^2 r^2}{2} + \frac{\beta^2}{2r^2}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad (1.3)$$

также остается интегрируемым в присуствии магнитного поля. При этом он также имеет практическую ценность: он играет роль ограничивающего потенциала кольцеобразные наноструктур, фабрикация которых возможной в последнее время.

Сферическое обобщение этой системы было предложено в недавной работе К. Арамяна [12]. Он задается потенциалом

$$V = 2\alpha^2 r_0^2 \tan^2\frac{\theta}{2} + \frac{\beta^2}{8r_0^2}\cot^2\frac{\theta}{2} \qquad (1.4)$$

и является интегрируемой системой. Его классические решения были найдены в работе [12], а квазиклассические – в работе [13]. В работах [14]

указанная система была приложена к исследованию кольцеобразных сферических пленок.

Совершенно очевидно, что заменив центробежный потенциал кругого/сферического осциллятора на центростремительный (формально это означает замену $\beta \to i\beta$), мы оставим систему интегрируемой. Но ее решения будут существенно зависеть от начальных условий задачи. Их нахождению и исследованию посвящена представленная работа.

Работа построена так:

Во второй главе мы найдем решения классических уровнений движения кругового осциллятора с центростремительным потенциалом

$$V = \frac{\alpha^2 r^2}{2} + \frac{\beta^2}{2r^2} \quad , \tag{1.5}$$

взаимодействующего с постоянным магнитным полем.

В третьей главе мы найдем решения классических уровнений сферического обобщения этой системы, задаваемого потенциалом

$$V_{\alpha r} = 2\alpha^2 r_0^2 \tan^2\frac{\theta}{2} + \frac{\beta^2}{8r_0^2}\cot^2\frac{\theta}{2} \tag{1.6}$$

2. Система на плоскости

Пусть, имеем аксиально симметричную систему на плоскости движушуюся во внешнем постоянном магнитном поле направленном перпендикулярно плоскости, $B_1 = B_2 = 0, \ B_3 = B$.

Если внешнее магнитное поле имеет наприженность $\mathbf{B}$, то на частицу действует сила Лоренца

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{i} \times \mathbf{B}$$

Ясно, что наличие постоянного магнитного поля не нарушает вращательной симметрии системы, а также не меняет ее энергии.

Итак, в присутствии постоянного магнитного поля двумерный осциллятор остается интегрируемой, по Лиувиллю, системой: он имеет два интеграла движения: энергию и вращательный момент. С их помощью можно проинтегрировать уравнения движения аналогично тому, как это сделано в учебнике Ландау и Лившица для движения частицы в потенциальном центрально-симметричном поле [15].

Однако, при сохранении функционального вида энергии, постоянное магнитное поле меняет вид вращительного момента. Если перейти к полярным координатам, то энергия и вращительный момент сингулярного кругового осциллятора с потенциалом (1.6) задаются выражениями

$$E=\frac{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}}{2}+\frac{\alpha^2r^2}{2}-\frac{\beta^2}{2r^2},\quad J=r^2\dot{\varphi}+\frac{Br^2}{2} \tag{2.7}$$

Отсюда находим

$$2E=\dot{r}^2+\frac{\left(J-Br^2/2\right)^2}{r^2}+\alpha^2r^2-\frac{\beta^2}{r^2} \tag{2.8}$$

Эквивалентно:

$$2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=-\left(\alpha^2+\frac{B^2}{4}\right)r^2+2(E+JB/2)r-(J^2+\beta^2). \tag{2.9}$$

Потому допустимые значения интегралов движения удовлетворяют условию

$$(E+JB/2)^2>\left(\alpha^2+\frac{B^2}{4}\right)(J^2+\beta^2), \tag{2.10}$$

Из (2.9) с легкостью находим

$$t=\frac{1}{2}\int\frac{dr}{\sqrt{-\left(\alpha^2+\frac{B^2}{4}\right)r^2+2(E+JB/2)r-(J^2+\beta^2)}} \tag{2.11}$$

Этот интеграл берется безо всякого труда, в результате чего получаем [16]

$$t=-\frac{1}{2\sqrt{\alpha^2+\frac{B^2}{4}}}arcsin\frac{(E+JB/2)-\left(\alpha^2+\frac{B^2}{4}\right)r}{\sqrt{(E+JB/2)^2-\left(\alpha^2+\frac{B^2}{4}\right)(J^2+\beta^2)}} \tag{2.12}$$

или, эквивалентно,

$$r^2=\frac{E+JB/2}{\alpha^2+\frac{B^2}{4}}\left(1+\sqrt{1-\frac{\left(\alpha^2+\frac{B^2}{4}\right)(J^2+\beta^2)}{(E+JB/2)^2}}sin2\sqrt{\alpha^2+\frac{B^2}{4}}t\right) \tag{2.13}$$

Как видим, наличие центробежного потенциала не влияет на частоту радиальных колебаний, но только на их амплитуду. Магнитное поле влияет как на амплитуду колебаний, так и на частоту. Принимая во внимание, что вращательный момент имеет вид$J=r\dot{\varphi}+Br^2/2,$ мы можем найти также зависимость $\varphi=\varphi(t)$,

$$\varphi=\int dt\frac{J-Br/2}{xr}=-\frac{Bt}{2}+J\int\frac{dt}{r^2(t)} \tag{2.14}$$

Этот интеграл тоже легко берется, в результате окончательно получаем

$$\sqrt{\frac{\left(\alpha^2+\frac{B^2}{4}\right)(J^2+\beta^2)}{(E+JB/2)^2}}\,tan(J+B^2/J)(\varphi+Bt/2) = \sqrt{1-\frac{\left(\alpha^2+\frac{B^2}{4}\right)(J^2+\beta^2)}{(E+JB/2)^2}} +$$

$$+tan\sqrt{\alpha^2+\frac{B^2}{4}}\,t \qquad (2.15)$$

Итак, мы нашли решения уровнений движения крогового осциллятора с центростремительным, взоимодействующего с постоянным матнитным полем. Можно ожидать, что и решения его сферического обобщения будут аналогично найденными.

3. Сферическое обобщение

Прежде чем приступить к его обсуждению сферического обобщения рассмотренной в предыдущем разделе системы, напомним необходимые элементы сферической геометрии. Метрика на двумерной сфере задается выражением

$$ds^2 = r_0^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2) \qquad (3.16)$$

где θ и φ связаны с эвклидовыми координатами сферы так

$$x_1 = r_0 sin\theta sin\varphi,\ x_2 = r_0 sin\theta cos\varphi,\ x_3 = r_0 cos\theta \qquad (3.17)$$

Потому сферический аналог, рассмотренный в предыдущем разделе системы, задаваемый потенциалом (1.6), имеет энергию

$$E = \frac{r_0^2\theta^2}{2} + \frac{r_0^2 sin^2\theta\dot{\varphi}^2}{2} + 2\alpha^2 r_0^2 tan^2\frac{\theta}{2} - \frac{\beta^2}{8r_0^2}cot^2\frac{\theta}{2} \qquad (3.18)$$

Опишем, как переходить от сферического случая к плоскому, отвечающего пределу$r_0 \to \infty$. С этой целью удобно воспользоваться стереографической проекцией сферы на плоскость, касательную южному полюсу сферы. Тогда каждой точке сферы (θ, φ) ставится в соответствие точка плоскости (y_1, y_2)

$$y_1 = 2r_0 cot\frac{\theta}{2} sin\varphi,\ y_2 = 2r_0 cot\frac{\theta}{2} cos\varphi \qquad (3.19)$$

соответственно,

$$r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = 2r_0 cot\frac{\theta}{2} \qquad (3.20)$$

При свободном движении на сфере вращательный момент задается выражением

$$J = {r_0}^2 sin\theta\dot{\varphi} \qquad (3.21)$$

При наличии вращетельно-инвариантного потенциала эта величина опять же сохраняется. В присутствии постоянного магнитного поля вращательный момент частицы на сфере задается выражением (см., например, [9])

$$J = {r_0}^2 sin\theta\dot{\varphi} - Br_0^2(1 - cos\theta) \qquad (3.22)$$

Соответственно, воспользовавшись приведенными выражениями энергии и вращательного момента мы можем проинтегрировать уравнения движения.

Исключив из выражения для энергии (3.18) угловую скорость и воспользовавшись выражением для углового момента (3.22), получим

$$\frac{2E}{r_0^2} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{\left(J/r_0^2 + B(1 - cos\theta)\right)^2}{(1 - cos^2\theta)} + 4\alpha^2\frac{1 - cos\theta}{1 + cos\theta} - \frac{\beta^2}{4r_0^4}\frac{1 + cos\theta}{1 - cos\theta} \qquad (3.23)$$

Перейдем теперь к решению задачи при отсутствии магнитного поля. Из (3.23) немедленно получаем интеграл

$$t = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{-\tilde{J}^2 + 2\tilde{E}x - \tilde{\alpha}^2x^2}} \qquad (3.24)$$

где введены обозначения

$$x = 2r_0^2(1 - cos\theta),\ \tilde{J}^2 = J^2 - \beta^2,\ 2\tilde{E} = E - \frac{\beta^2}{4r_0^2},$$

$$\tilde{\alpha}^2 = \alpha^2 + \frac{E}{2r_0^2} - \frac{\beta^2}{16r_0^2} \qquad (3.25)$$

Зависимость от времени угловой переменной получается из (3.22):

$$\varphi = \int dt\frac{J/r_0^2 + B(1 - cos\theta)}{(1 - cos^2\theta)} = (J/2r_0^2 + B)\int\frac{dt}{2 - x(t)} + J/2r_0^2\int\frac{dt}{x(t)} \qquad (3.26)$$

Легко найти также зависимость $\varphi = \varphi(\theta)$:

$$\varphi = J\int\frac{dr}{\sqrt{-\tilde{\alpha}^2r^4 + 2\tilde{E}r^2 - \tilde{J}^2}},\ \text{где}\ r = (4r_0^2 - x)\text{x} \qquad (3.27)$$

Заметим, что в отличие от плоского случая, значения $\tilde{\alpha}^2$ и $\tilde{E}$ могут быть как положительными, так и отрицательными. Следовательно, явный вид интеграла (3.24) (а значит, и (3.27)), в отличие от плоского случая, очень зависит от начальных условий задачи.

3.1 Основное решение

Рассмотрим случай $\tilde{\alpha}^2 > 0$, который переходит в плоском пределе в описанное в решение.

$$t = -\frac{1}{-\tilde{\alpha}} arcsin \frac{\tilde{\alpha}\mathrm{x} + \tilde{E}}{\sqrt{\tilde{E}^2 - \tilde{\alpha}^2 \tilde{J}^2}}$$

Эквивалентно, имеем

$$2r_0^2(1 - cos\theta) = \frac{\sqrt{\tilde{E}^2 - \tilde{\alpha}^2 \tilde{J}^2}}{\tilde{\alpha}} sin\tilde{\alpha}t - \frac{\tilde{E}}{\tilde{\alpha}} \quad (3.28)$$

Здесь мы имеем условия

$$\tilde{E}^2 > \tilde{J}^2\tilde{\alpha}^2, \left|\tilde{\alpha}^2 x + \tilde{E}\right| < \sqrt{\tilde{E}^2 - \tilde{\alpha}^2 \tilde{J}^2}$$

Как видим, в отличие от плоского сингулярного осциллятора, эффективная частота сферического сингулярного осциллятора зависит от параметра сингулярности. Как и в случае несингулярного сферического осциллятора, частота радиальных колебаний зависит от энергии системы. Иными словами, в отличие от плоской системы, колебания сферической системы негармоничны.

Приведем теперь выражение для траектории системы:

$$\sqrt{\tilde{E}^2 - \tilde{\alpha}^2 \tilde{J}^2}\, sin\tilde{\alpha}\varphi = \frac{\tilde{\alpha}}{2r_0^2(1 - cos\theta)} - \tilde{E} \quad (3.29)$$

3.2 Дополнительные решения

Теперь рассмотрим случаи с $\tilde{\alpha}^2 < 0$, которые не имеют аналога в плоском пределе. Но даже здесь в наличии три различных случая:

1. $\tilde{\alpha}^2 < 0,\ \tilde{\alpha}^2\tilde{J}^2 > -\tilde{E}^2$

В этом случае получаем

$$t = -\frac{1}{-\tilde{\alpha}^2} arcsinh \frac{\tilde{\alpha}\mathrm{x} + \tilde{E}}{\sqrt{\tilde{E}^2 + \tilde{\alpha}^2 \tilde{J}^2}}$$

Отсюда имеем

$$2r_0^2(1 - cos\theta) + \tilde{E} = \sqrt{\tilde{E}^2 + \tilde{\alpha}^2 \tilde{J}^2}\,\sinh(-\tilde{\alpha}t) \quad (3.30)$$

Траектория задается выражением

$$\sqrt{\tilde{E}^2 + \tilde{\alpha}^2 \tilde{J}^2}\,\sinh|\tilde{\alpha}|\varphi = \tilde{E} - \frac{\tilde{\alpha}^2}{2r_0^2(1 - cos\theta)} \quad (3.31)$$

2. $\tilde{\alpha}^2 < 0, \tilde{\alpha}^2\tilde{J}^2 = -\tilde{E}^2,\ \tilde{\alpha}^2 x + \tilde{E} > 0$

В этом случае получаем

$$t = \frac{1}{\tilde{\alpha}} log\left|\tilde{\alpha}^2 x + \tilde{E}\right| - \log const$$

Отсюда имеем

$$2\tilde{\alpha}^2 r_0^2(1 - cos\theta) + \ \tilde{E} = const\ e^{\tilde{\alpha}t} \tag{3.32}$$

Траектория задается выражением

$$e^{|\tilde{\alpha}|\varphi} = 2\tilde{E} - \frac{\tilde{\alpha}^2}{r_0^2(1-cos\theta)} \tag{3.33}$$

3 . $\tilde{\alpha}^2 < 0, \tilde{\alpha}^2\tilde{J}^2 = -\tilde{E}^2, \tilde{\alpha}^2 x + \tilde{E} < 0$

В этом случае получаем

$$t = -\frac{1}{\tilde{\alpha}} log\left|\tilde{\alpha}^2 x + \tilde{E}\right| - \log const$$

Отсюда имеем

$$2\tilde{\alpha}^2 r_0^2(1 - cos\theta) + \ \tilde{E} = const\ e^{-\tilde{\alpha}t} \tag{3.34}$$

Траектория задается выражением

$$e^{|\tilde{\alpha}|\varphi} = 2\tilde{E} - \frac{\tilde{\alpha}^2}{r_0^2(1-cos\theta)} \tag{3.35}$$

Итак, мы нашли классические решения сферического обобщения двумерного сингулярного осциллятора взаимодействующего с постоянным магнитным полем для случая, когда сингулярность задается центростремительным потенциалом. Мы установили однозначное соответствие между решениями сферической и плоской систем.

В заключение хотим поблагодарить Армена Нерсесяна за постановку задачи и помощь в ее решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Perelomov A.M.* Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras, Bikhauser, 1990.

2. *Arnold V.I.* Mathematical methods of classical, Nauka Publ., Moscow, 1973.

3. *Higgs P.W., Phys J.* A **12** (1979) 309.
Leemon H.I., Phys J. A **12** (1979) 489.

4. *Schrodinger E.* Proc. Roy. Irish Soc. **46** (1941) 9; **46** (1941) 183: **47** (1941) 53.

5. *Laughlin R.B.* Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1395.

6. *Zhang S.C., Hu J.P.* Science **294** (2001) 823.

7. *Belluci S., Nersessian A.* Phts. Rev D **67** (2003) 065013
Nersessian A., Yeranyan A., Phys J. A **37** (2004) 2791

8. *Belluci S., Nersessian A., Yeranyan A.* Phys. Rev. D **70** (2004) 085013; Phys. Rev. D **70** (2004), 045006.

9. *Alexanyan M.A., Aramyan K.S.* Contemp J. Phys. **42** (2007), 49

10. *Mardoyan L. and Nersessian A.* Phys. Rev. **B72** (2005) 233303

11. *Belluci S., Mardoyan L.and Nersessian A.* Phys.. Lett.**B636** (2006), 137;
Mardoyan L.G., Petrosyan M.G. Contemp J. Phys. **48** (2013) 70

12. *Aramyan K.S.* Theor. Math. Phys, **156** (2008), 1075

13. *Bellucci S., Nersessian A., Saghatelian A., Yeghikyan V., Comp J.* Theor.Nanosci. **8** (2011) 769.

14. *Kazaryan E.M., Shahnazaryan V.A., Sarkisyan H.A., Physica E.* **52** (2013), 122;
Optics Comm., **315** (2014), 253; Few-Body Systems **55** (2014), 151.

15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.,* Механика. М.: «Наука», 1988.

16. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: «Наука», 1983.

ՍԻՆԳՈՒԼՅԱՐ ՍՖԵՐԱՅԻՆ ՕՍՑԻԼՅԱՏՈՐԸ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ. ՁԳՈՂԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Գ. Բագունց, Գ. Գաբրիելյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ստացված են անընդհատ մագնիսային դաշտի հետ փոխգործող երկչափանի սինգուլյար օսցիլյատորի սֆերային ընդհանրացման դասական լուծումներ այն դեպքի համար, երբ սինգուլյարությունը տրված է կենտրոնամետ պոտենցիալով: Ցույց է տրված, որ բացի հիմնական որոշումից, որն ունի պլանարային սահման, համակարգը նաև թույլ է տալիս հավելյալ որոշումներ, որոնք հարթության վրա իրենց անալոգը չունեն:
Հիմնաբառեր՝ սինգուլյար օսցիլյատոր, մագնիսային դաշտ:

SINGULAR SPHERICAL OSCILLATOR IN CONSTANT MAGNETIC CASE: ATTRACTION

G. Bagunts, G. Gabrielyan

SUMMARY

Classical solutions of the two-dimensional spherical singular oscillator interacting with constant magnetic field are found for the case of centripetal potential. It is shown that in addition to the main solution having planar limits, the system possesses supplementary ones which have no analogs on plane.
Keywords: singular oscillator, magnetic field.

SPIN-DEPENDENT COHERENT TRANSPORT IN A DOUBLE QUANTUM DOT SYSTEM

L. Petrosyan [1,2]

[1] *Yerevan State Medical University, 2 Koryun St., Yerevan, 0025, Armenia*
[2] *Russian-Armenian State University, 123 Hovsep Emin Street, Yerevan, 0051, Armenia*

SUMMARY

We study spin-resolved resonant tunneling in a system of two quantum dots sandwiched between doped quantum wells. In the coherent (Dicke) regime, i.e., when quantum dot separation is smaller than the Fermi wavelength in two-dimensional electron gas in quantum wells, the application of an in-plane magnetic field leads to a pronounced spin-resolved structure of the conductance peak lineshape even for very small Zeeman splitting of quantum dots' resonant levels. We also show that Aharonov-Bohm flux penetrating the area enclosed by electron tunneling pathways completely destroys conductance spin structure.

1. Introduction

Interference effects in electron transmission through localized states in semiconductor nanostructures such as, e.g., semiconductor quantum dots (QD) are among highlights in coherent transport studies [1,2]. The electron phase acquired in the course of tunneling through several pathways provided by QDs situated between doped semiconductor leads can result in striking features of the conductance lineshape near resonance transmission [3]. The simplest realization of coherent transport is served by *two* QDs independently coupled to two-dimensional electron gas (2DEG) in the left and right lead while the direct tunneling between QDs is weak [4]. In a magnetic field, the conductance of such a double-QD system exhibits Aharonov-Bohm oscillations [5,6,7] as a function of magnetic flux penetrating the area bound by tunneling paths [4,8,9]. At zero field, the coherence between QDs is controlled by their coupling via the continuum of electronic states in the leads [4,10]. If QDs separation, a, is comparable to electron's Fermi wavelength, λ_F, then electron transmission is mediated by system eigenstates rather than by individual QDs leading to conductance peak narrowing or Fano-like lineshapes [4,11,12,13]. Here a revealing optical analogy is the cooperative emission of two excited atoms (Dicke superradiance) [14,15]; QDs' coupling via continuum of

electronic states is similar to the coupling of two radiating atoms via the electromagnetic field [4,10].

On the other hand, spin-dependent tunneling in semiconductor nanostructures has recently attracted much interest due to the possibility of controlling both spin and charge currents in electronic circuits [17]. Well-resolved spin polarized currents were observed through single-electron or few-electron QDs subjected to an in-plane magnetic field [18-24].

In this paper we study spin-dependent resonant tunneling through a double QD system sandwiched between doped semiconductor quantum wells (see Fig. 1). Specifically, we focus on spin-resolved resonant tunneling in the Dicke regime, i.e., $ak_F < 1$, where k_F is electron Fermi wavevector in 2DEG. In this regime, zero field conductance lineshape represents a narrow peak of width $\sim (ak_F)^2\Gamma$ on top of a wide peak of width $\sim 2\Gamma$, where Γ is the conduction peak width for resonant tunneling through a single QD. We demonstrate that an in-plane magnetic field, which introduces disbalance between spin-polarized electrons in 2DEG, leads to a pronounced spin structure of the narrow conduction peak even for very weak Zeeman splitting of QD energy levels, $\Delta E_0^z \ll \Gamma$, i.e., when conductance normally would not be spin-resolved in single-QD tunneling. The lineshape of spin-resolved conductance in the Dicke regime is very sensitive to other system parameters as well, e.g., to energy level difference due to QD size variation. We show that through an area enclosed by electron tunneling pathways Aharonov-Bohm flux completely destroys this fine spin structure of the conductance.

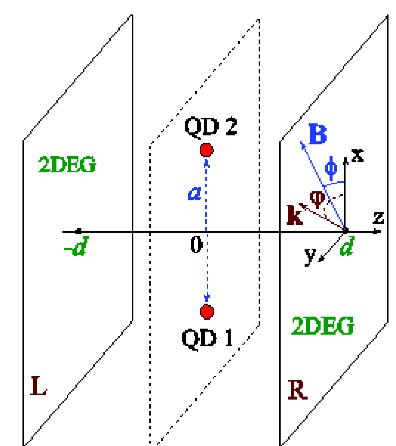


Fig.1. Schematics of resonant tunneling of an electron through a pair of QDs sandwiched between doped semiconductor layers in in-plane magnetic field.

The paper is organized as follows. In section 2, we derive general expression for conductance in the presence of in-plane magnetic field within tunneling Hamiltonian approach. In section 3, we describe analytical results. In section 4, we present the results of our numerical calculation, and section 5 concludes the paper.

2. Spin-sensitive two-channel resonant tunneling

We consider electron resonant tunneling between left and right 2DEGs located in $z = \mp d$ planes, respectively, through a pair of quantum dots (QD) in $z = 0$ plane at a distance a from each other (see Fig. 1). The system is subjected to an in-plane magnetic field $\mathbf{B} = B(\cos\phi, \sin\phi, 0)$ characterized by vector potentials $\mathbf{A}^{L,R} = Ba(\pm\sin\phi, \mp\cos\phi, 0)$ in the left/right 2DEGs, where ϕ is the azimuthal angle. Within tunneling Hamiltonian approach, the system Hamiltonian is $H = H_L + H_R + H_{QD} + H_T$, where H_α ($\alpha = (L, R)$) is 2DEG Hamiltonian in the left/right plane, H_{QD} is Hamiltonian of localized states in QD, and H_T describes the tunneling between them. The 2DEG Hamiltonian has the form

$$H_\alpha = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{k} + \frac{e}{c}\mathbf{A}^\alpha\right)^2 + \frac{1}{2} g\mu_B \left(\sigma \cdot \mathbf{B}\right), \tag{1}$$

where first and second terms describe, respectively, orbital and Zeeman contributions. Here e, m, and g are, respectively, electron charge, effective mass and g-factor, c and μ_B are speed of light and Bohr magneton, and σ is Pauli matrices vector. We assume identical left and right 2DEGs that are characterized by the same m and g, and set $\hbar = 1$ throughout. By eliminating $\mathbf{A}^\alpha$ in the orbital term via gauge transformation in a standard manner, the 2DEG energy spectrum $E_{\mathbf{k}\delta}$ and eigenstates $\psi^\alpha_{\mathbf{k}\delta}(\mathbf{r})$ in each plane can be found as

$$E_{\mathbf{k}\delta} = \frac{k^2}{2m} + \delta\,\omega_z/2, \quad \psi^{L,R}_{\mathbf{k}\delta}(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\mathbf{kr} \pm i\frac{e}{c}\mathbf{B}\times\mathbf{r}}}{\sqrt{2A}} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta e^{i\phi} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

where

$$\omega_z = g\mu_B B \tag{3}$$

is 2DEG Zeeman energy, ϕ – magnetic field orientation relative to the x-axis, $\delta = \pm 1$, and A is the normalization area. Two possible signs ($\pm$) of magnetic phase in Eq. (2) correspond to left/right 2DEG, respectively. For each value $\delta = \pm 1$, the Fermi surface, $k_F^\delta(\varphi)$ represents circle in $\mathbf{k}$-space satisfying equation

$$\frac{k^2}{2m} \pm \omega_z/2 = E_F, \tag{4}$$

where E_F is the Fermi energy.

The tunneling Hamiltonian describing transitions between QD and 2DEG states has the form

$$H=\sum_{jss'}E_j^{ss'}c_{js}^\dagger c_{js'}+\sum_{\mathbf{k}\delta\alpha}E_{\mathbf{k}\delta}^{\alpha}c_{\mathbf{k}\delta\alpha}^\dagger c_{\mathbf{k}\delta\alpha}+\sum_{\mathbf{k}\delta\alpha\, js}\left(V_{\mathbf{k}\delta\alpha}^{js}c_{js}^\dagger c_{\mathbf{k}\delta\alpha}+\text{H.c.}\right), \qquad (5)$$

where $E_j^{ss'}=E_j\delta_{ss'}+\frac{1}{2}g_0\mu_B(\mathbf{B}\cdot\sigma)_{ss'}$ is QD's energy matrix. Here E_j ($j=1,2$) are QDs' resonant energy levels, g_0 is QD g-factor (we chose spin quantization axis along $\mathbf{z}$ and $s=\pm1$ labels spin up/down projections), and $V_{\mathbf{k}\delta\alpha}^{js}$ is electron transition matrix element between QD state $|js\rangle$ and 2DEG state $|\mathbf{k}\delta\alpha\rangle$ ($\alpha=L,R$). We assume no spin flip during tunneling through the barrier in lateral direction.

Within tunneling Hamiltonian approach, the conductance is given by [10]

$$G=\frac{e^2}{\pi\hbar}\mathrm{Tr}\left(\hat{\Gamma}^R\frac{1}{E_F-\hat{E}-\hat{\Sigma}}\hat{\Gamma}^L\frac{1}{E_F-\hat{E}-\hat{\Sigma}^\dagger}\right), \qquad (6)$$

where the matrix $E_{jk}^{ss'}=\delta_{jk}E_j^{ss'}$ is diagonal in QD indices, $\hat{\Sigma}=\hat{\Sigma}_L+\hat{\Sigma}_R$ is QDs self-energy matrix, due to transitions to left and right 2DEG,

$$\left(\Sigma_\alpha\right)_{jk}^{ss'}\equiv\left(\Delta_\alpha\right)_{jk}^{ss'}-\frac{i}{2}\left(\Gamma_\alpha\right)_{jk}^{ss'}=\sum_{\mathbf{k}\delta}\frac{V_{\mathbf{k}\delta\alpha}^{js}V_{\mathbf{k}\delta\alpha}^{ks'*}}{E_F-E_{\mathbf{k}\delta}+i0}, \qquad (7)$$

and trace is taken both in configuration and spin space. The transition matrix element can be presented as [4] $V_{\mathbf{k}\delta\alpha}^{js}=t_\alpha\psi_{\mathbf{k}\delta}^{\alpha s}(\mathbf{r}_j)$, where $\mathbf{r}_j$ is the *in-plane* projection of QD coordinates and t_α is the tunneling amplitude between QD and 2DEG (we assume that the barrier is sufficiently high and neglect t_α dependence on energy).

The self-energy (7) then takes the form

$$\left(\Sigma_\alpha\right)_{ij}^{ss'}=t_\alpha^2G_\alpha^{ss'}(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j) \qquad (8)$$

where

$$G_{L,R}^{ss'}(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)=\frac{1}{2}e^{\pm i(1-\delta_{ij})(ad/l^2)\sin\phi}\sum_{\delta=\pm}\delta^{(s-s')/2}e^{i\phi(s'-s)/2}\times\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)}}{E_F-E_{\mathbf{k}\delta}+i0}, \qquad (9)$$

is 2DEG Green function corresponding to eigenstates (2), $l=\sqrt{c/eB}$ is the magnetic length. The decay matrix $\hat{\Gamma}$ and energy shift matrix $\hat{\Delta}$ represent 4×4 matrices in spin and configuration space and are determined, respectively, by singular and principal parts of Green function (9).

3. Calculation of conductance

We consider a symmetric case when two QDs with resonant levels $E_1 = E_2 = E$ at a distance a from each are separated by tunneling barrier of thickness d from identical 2DEG (see Fig. 1). In this case, the tunneling amplitudes are equal, $t_L = t_R = t$, and the QD self-energies, due to tunneling to left/right 2DEG, differ only by Aharonov-Bohm phase: $\left(\Sigma_{L,R}\right)_{ij}^{ss'} = e^{\pm i(1-\delta_{ij})(ad/l^2)\sin\phi}\tilde{\Sigma}_{ij}^{ss'}$ with

$$\tilde{\Sigma}_{ij}^{ss'} = \frac{t^2}{2}\sum_{\delta=\pm1}\delta^{\frac{s-s'}{2}}e^{i\phi(s'-s)/2}\times\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{ij}}}{E_F - k^2/2m - \delta\,\omega_z/2 + i0}, \qquad (10)$$

where $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$.

The Fermi surface is determined by Eq. (4) and represents two circles in momentum space with radii k_F^δ given by

$$k_F^\pm = k_F\sqrt{1\mp\omega_z/2E_F}, \qquad (11)$$

where $k_F = \sqrt{2mE_F}$. Then self-energy (10) has the form,

$$\tilde{\Sigma}_{ij}^{ss'} = -\frac{i\Gamma}{4}\sum_{\delta=\pm1}\delta^{\frac{s-s'}{2}}e^{i\phi(s-s')/2}H_0^{(1)}\left(k_F^\delta r_{ij}\right), \qquad (12)$$

where $H_0^{(1)}(x)$ is Hankel function of first kind, $\hat{b}$ is unit vector along the magnetic field, and $\Gamma = mt^2$ is resonant level spectral width for isolated QD due to tunneling to the 2DEG (see below). The function $H_0^{(1)}\left(k_F^\delta r_{ij}\right)$ can be viewed as 2×2 matrix in configuration space with diagonal elements $H_0^{(1)}(0)$ and non-diagonal elements $H_0^{(1)}\left(k_F^\delta a\right)$. Note that $\mathrm{Im}\left[H_0^{(1)}(0)\right]$ contains logarithmic divergence that should be properly regularized; namely, for infinitesimal $r_{ij} = \epsilon \to 0$, we have $H_0^{(1)}\left(k_F^\delta\epsilon\right) \approx 1 + (2i/\pi)\left[\gamma_E + \ln\left(k_F^\delta\epsilon/2\right)\right]$, where γ_E is the Euler constant. We now subtract *zero-field* value of $\mathrm{Im}\left[H_0^{(1)}(k_F^\delta\epsilon)\right]$, i.e., with $k_F^\delta = k_F$, so that the regularized expression for $H_0^{(1)}(0)$ is $1 + (2i/\pi)\ln\left(k_F^\delta/k_F\right)$. Such regularization corresponds to zero energy shift for an *isolated* QD in the absence of magnetic field, and we will only use regularized quantities hereafter. The matrix $H_0^{(1)}\left(k_F^\delta r_{ij}\right)$ can be written in terms of Pauli matrices in configuration space τ as

$$H_0^{(1)}\left(k_F^{\delta} r_{ij}\right) = \left[1+\frac{2i}{\pi}\ln\left(\frac{k_F^{\delta}}{k_F}\right)\right] I_{\tau} + \left[J_0\left(k_F^{\delta} a\right) + iY_0\left(k_F^{\delta} a\right)\right]\tau_1, \tag{13}$$

where I_τ is unit matrix and we used $H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x)$, J_n and Y_n being Bessel function of first and second kind, respectively. Expressing the spin factor in Eq. (12) via Pauli spin matrices as

$$S_{\delta}^{ss'}(\phi) \equiv \delta^{\frac{s-s'}{2}} e^{i\phi(s-s')/2} = \left(I_{\sigma} + \delta \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{b}}\right)_{ss'}, \tag{14}$$

where $\hat{b}$ is unit vector along magnetic field (I_σ is unit matrix in spin space), the self-energy $\hat{\Sigma}_\alpha = \hat{\Delta}_\alpha - i\hat{\Gamma}_\alpha/2$ is presented as a 4×4 matrix in spin and configuration space with

$$\hat{\Gamma}_{L,R} = \frac{\Gamma}{2}\sum_{\delta=\pm1} S_{\delta} \otimes [I_{\tau} + \Phi_{L,R} J_0(k_F^{\delta} a)\tau_1], \tag{15}$$

$$\hat{\Delta}_{L,R} = \frac{\Gamma}{4}\sum_{\delta=\pm1} S_{\delta} \otimes [\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{k_F^{\delta}}{k_F}\right) I_{\tau} + \Phi_{L,R} Y_0(k_F^{\delta} a)\tau_1],$$

where $\Phi_{L,R} = e^{\pm i(ad/l^2)\sin\phi}$ is Aharonov-Bohm factor. Using these expressions, the conductance (6) can be straightforwardly evaluated.

Since orbital and spin sectors in Eq. (15) factorize, they can be diagonalized independently and an explicit expression for the conductance can be obtained. For simplicity, consider magnetic field directed along the x-axis (i.e., $\phi = 0$). In this case, there is no Aharonov-Bohm flux ($\Phi_{L,R} = 1$) so that $\Sigma_L = \Sigma_R$, and, after simple algebra, we obtain

$$G = \frac{e^2}{\pi\hbar}\sum_{q,p=\pm} \frac{\Gamma_{qp}^2}{\left(E_F - E_0 - p\,\Delta E_0^z/2 - \Delta_{qp}\right)^2 + \Gamma_{qp}^2}, \tag{16}$$

where ΔE_0^z is QD Zeeman energy and

$$\Gamma_{qp} = \Gamma[1 + qJ_0(k_F^p a)], \tag{17}$$

$$\Delta_{qp} = \Gamma[\frac{1}{\pi}\ln\left(1 - p\frac{\omega_z}{2E_F}\right) + qY_0(k_F^p a)],$$

with Fermi momenta k_F^p corresponding to two Fermi surfaces ($p = \pm$) given by Eq. (2).

For zero field, i.e. $\omega_z = \Delta E_0^z = 0$ and $k_F^p = k_F$, both spin channels contribute equally and we recover the known result for Dicke tunneling through a pair of QD [4]

$$G = \frac{2e^2}{\pi\hbar} \sum_{\pm} \frac{\Gamma_\pm^2}{\left(E_F - E_0 - \Delta_\pm\right)^2 + \Gamma_\pm^2}, \qquad (9)$$

where $\Gamma_\pm = \Gamma\left[1 \pm J_0(k_F a)\right]$ and $\Delta_\pm = \pm\Gamma Y_0\left(k_F a\right)$. For $k_F a \ll 1$, the conductance lineshape represents a narrow peak of width $\Gamma_- \approx (k_F a)^2 \Gamma / 4$ on top of a wide peak of width $\Gamma_+ \approx 2\Gamma$. With the magnetic field turned on, each Zeeman-split Fermi surface described by Eq. (11) contributes independently to the conductance (14) which results in an additional fine structure of peak conductance. With further field increase, the Fermi surface k_F^- shrinks to a point, and for $\omega_z > 2E_F$ the 2DEG is fully spin-polarized causing a dramatic change in the conductance, as illustrated in the next section.

4. Numerical results and discussion

Here we describe our results for conductance (6) obtained by numerically evaluating the matrix elements (10). To simplify the analysis, we assume identical 2DEG in left and right planes with Zeeman energy ω_z. A pair of QDs separated by a distance a are located in the middle between 2DEG planes, and each QD is independently tunnel-coupled to the left and right 2DEG (see Fig. 1). The resonant levels in QDs have energies $E_0 \pm \Delta E_0 \pm \Delta E_0^z$, where ΔE_0 is a shift from medium level energy E_0 due to variations in QD size and ΔE_0^z is QD Zeeman splitting. Here we disregard SO splitting of QD levels [25]. Rather than restricting ourselves to a specific material, we present our numerical results for a wide range of parameters to comprehensively describe the role of magnetic field and SO coupling in coherent transport in this system.

In Fig. 2 we show zero-field conductance vs. Fermi energy for several values of electron concentration (or QD separation) as the parameter ak_F traverses the region $ak_F \lesssim 1$ (since $\Gamma / E_F \ll 1$, the parameter ak_F is nearly constant in the resonance region). While for $ak_F > 1$ the conductance shows a single peak of amplitude ~ 4 (in units of $e^2 / \pi\hbar$) corresponding to two orbital and two spin chan-

nels, with decreasing ak_F it develops a double-peak structure with a narrow peak on top of a wider peak. This is a characteristic signature of coherent Dicke tunneling [4] due to electron transmission through symmetric and antisymmetric superpositions of QD states, rather than through individual QDs, with the corresponding rates $\Gamma_\pm = \Gamma[1 \pm J_0(ak_F)]$. The resonance shift with decreasing ak_F is caused by QDs level repulsion [$\Delta_\pm = \pm\Gamma Y_0(k_F a)$] due to their coupling through 2DEG, while the peak narrowing is due to weaker coupling of antisymmetric state to 2DEGs as the electron Fermi wavelength $\lambda_F = 2\pi / k_F$ exceeds QD separation a.

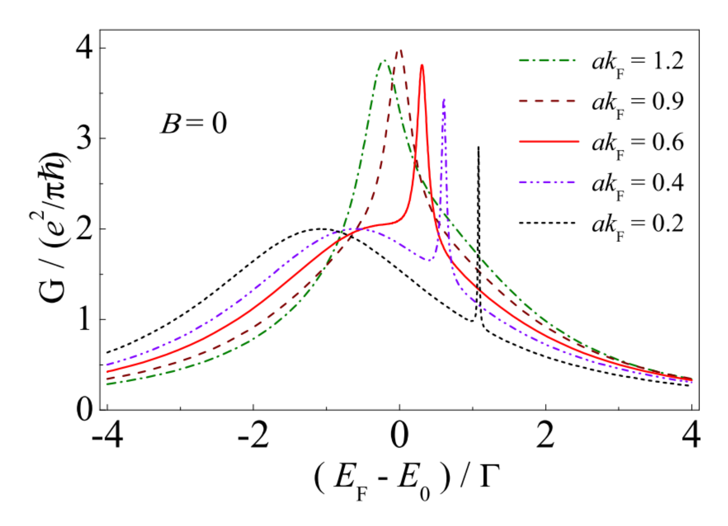


Fig.2. Conductance through identical QDs ($\Delta E_0 = 0$) is shown for several QD separations a in the absence of QD Zeeman splitting.

In Fig. 3 we show the conductance evolution in the Dicke regime (i.e., for $ak_F < 1$) with changing in-plane magnetic field. To distinguish between various effects of magnetic field, here we chose $\mathbf{B} \| \hat{\mathbf{x}}$ (i.e., $\phi = 0$ and, hence, no Aharonov-Bohm flux) and, for a moment, disregard QDs Zeeman splitting ($\Delta E_0^z = 0$). With increasing 2DEG Zeeman energy ω_z, the narrow conductance peak develops a shoulder and then splits into two peaks of the width $\Gamma_-^\pm = \Gamma\left[1 - J_0(ak_F^\pm)\right]$ corresponding to two spin-polarized antisymmetric states with energies shifted by $\Delta_-^\pm = -\Gamma Y_0\left(ak_F^\pm\right)$. This splitting is caused by tunnel coupling of QDs levels to spin-polarized electrons in 2DEG with different Fermi momenta [see inset in Fig. 3]. With increasing field, as $\omega_z / 2$ approaches E_F, the upper spin subband becomes nearly empty while the lower spin subband population nearly doubles; the

emergence of smaller and larger Fermi momenta, k_F^+ and k_F^-, leads to significant difference in new peaks' width. A similar effect takes place for tunneling through the symmetric state; however, the spin-polarized states with wide widths $\Gamma_+^{\pm} = \Gamma\left[1 + J_0(ak_F^{\pm})\right]$ and energy shifts $\Delta_+^{\pm} = \Gamma Y_0\left(ak_F^{\pm}\right)$ are not well-resolved and manifest themselves as extended plateaus at low energy side. With further field increase, as the upper spin subband is completely depopulated ($\omega_z > 2E_F$), the tunneling current is fully spin-polarized and the conductance shows only a single peak.

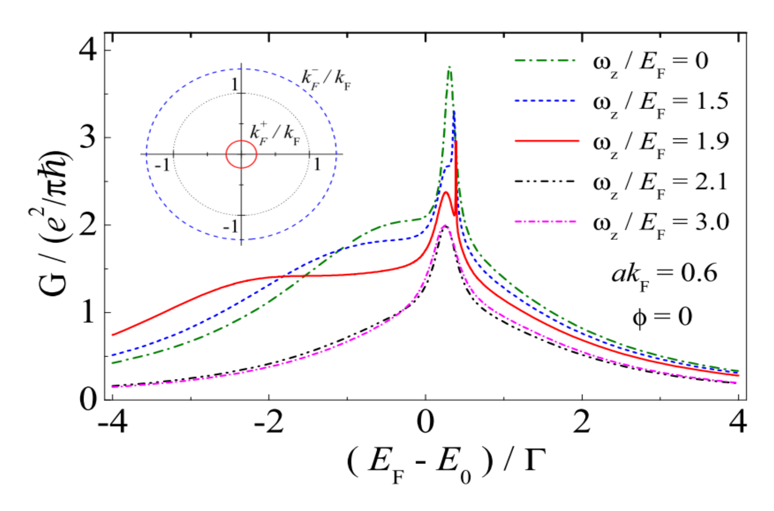


Fig.3. Conductance through identical QDs ($\Delta E_0 = 0$) is shown for several values of 2DEG Zeeman energy, ω_z, in the absence of QD Zeeman splitting. Inset: Spin split 2DEG Fermi surface in $\mathbf{k}$ -plane for $\omega_z / E_F = 1.9$

In Fig. 4, we show the effect of QD Zeeman splitting ΔE_0^z on the conductance lineshape. Here we focus on QD level spin splitting *per se* and therefore only change QDs g -factor while keeping the magnetic field constant. To highlight coherent effects in spin-resolved tunneling, we chose very small values of QD Zeeman splitting ($\Delta E_0^z / \Gamma \ll 1$) that normally are not resolved in single-QD tunneling, and plot the narrow peak lineshape near the critical field ($\omega_z / E_F = 1.9$); the effect of small ΔE_0^z on wide conductance peak is negligible. Remarkably, the narrow peak exhibits a pronounced splitting for ΔE_0^z as small as 0.1Γ. With increasing ΔE_0^z, this splitting steadily increases with peak-to-peak separation being $\sim 2\Delta E_0^z$. At the same time, the overall lineshape becomes more symmetrical as

QDs' upper spin levels now couple to higher k_F^- 2DEG states [see Fig. 4]. Fig. 5 shows conductance peak evolution with changing ΔE_0^z when there QD's level energies are slightly different, $E_{1,2} = E_0 \pm \Delta E_0$, e.g., due to QDs' size variation. For $\Delta E_0 = 0.5\Gamma$, an overall drop of peak amplitude is observed and, with increasing ΔE_0^z, the conductance exhibits no sharp features.

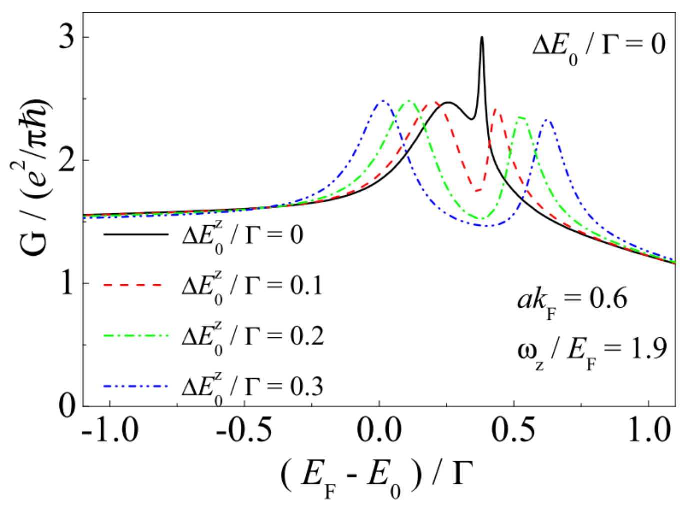


Fig.4. Conductance peak evolution is shown with increasing QD Zeeman splitting ΔE_0^z for QD level detuning values $\Delta E_0 = 0$ at near-critical in-plane field $\omega_z = 1.9 E_F$.

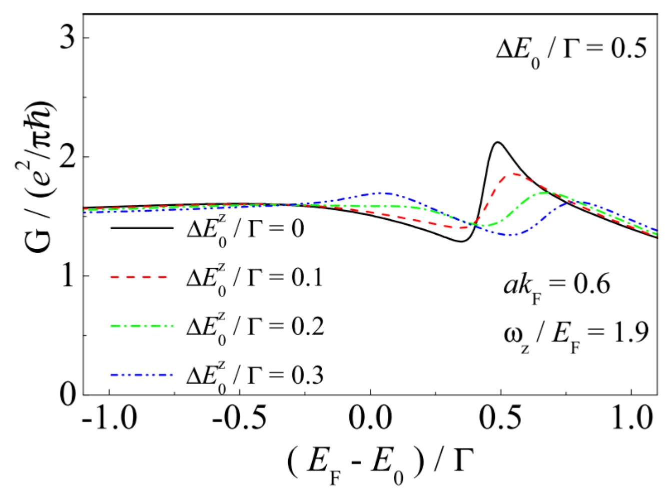


Fig.5. Conductance peak evolution is shown with increasing QD Zeeman splitting ΔE_0^z for QD level detuning values $\Delta E_0 = 0.5\Gamma$ at near-critical in-plane field $\omega_z = 1.9 E_F$.

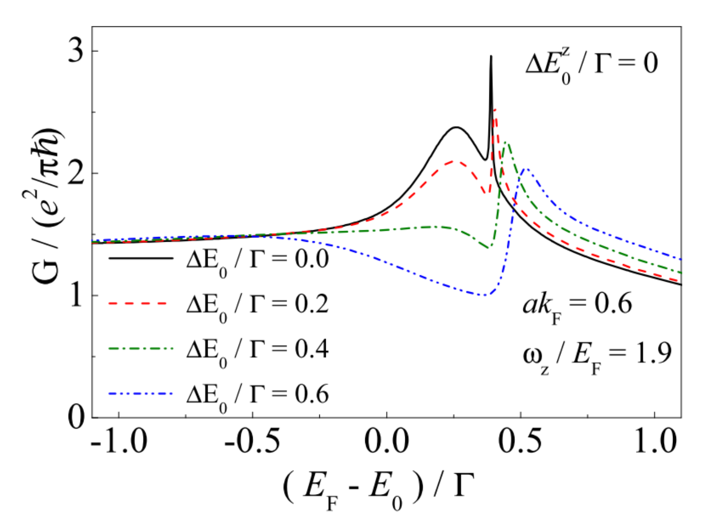


Fig.6. Conductance peak evolution is shown with increasing QD level detuning ΔE_0 for QD Zeeman splitting value $\Delta E_0^z = 0$ at near-critical in-plane field $\omega_z = 1.9E_F$.

In Fig. 6, we show a complementary case of conductance peak evolution with changing ΔE_0 at a constant ΔE_0^z for nearly critical magnetic field strength ($\omega_z / E_F = 1.9$). For finite ΔE_0, the narrow peak of the upper spin subband gets wider as the upper QD level E_1 now couples to 2DEG states with a higher Fermi momenta k_F^- [see Fig. 6]. With increasing ΔE_0, the low-energy resonance disappears and turns into antiresonance; this effect is similar to the zero-field case [4].

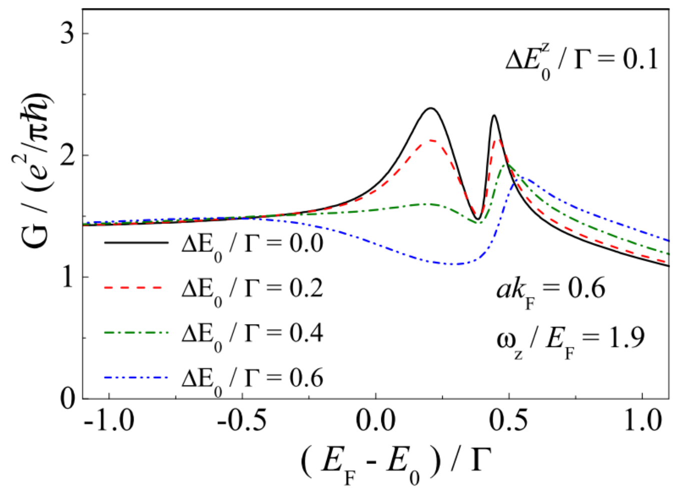


Fig.7. Conductance peak evolution is shown with increasing QD level detuning ΔE_0 for QD Zeeman splitting value $\Delta E_0^z = 0.1\Gamma$ at near-critical in-plane field $\omega_z = 1.9E_F$.

A similar evolution of narrow peak lineshape is observed for a finite QD Zeeman splitting [see Fig. 7].

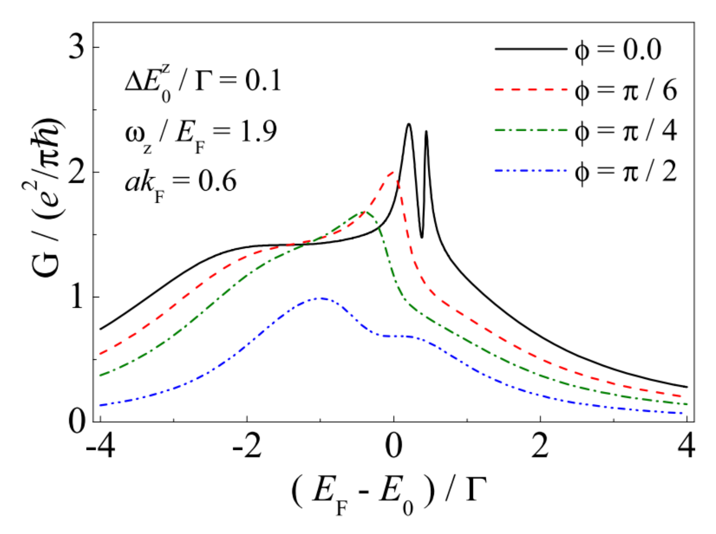


FIG.8. Conductance evolution with increasing Aharonov-Bohm flux is shown with changing magnetic field tilt angle ϕ at $\Delta E_0^z = 0.1\Gamma$, $\omega_z = 1.9E_F$, and $\Delta E_0 = 0$.

Finally, consider now the role of Aharonov-Bohm flux through the area enclosed by electron tunneling paths between left and right 2DEGs at finite finite angle ϕ (see Fig. 1). In Fig. (8) we show conductance evolution as ϕ changes between $\phi = 0$ (no flux) to $\phi = \pi / 2$ (maximal flux) both in the absence and presence of SO coupling. In either case, the Aharonov-Bohm phase suppresses the interference that causes the narrow peak of the conductance and completely destroys its spin structure.

5. Conclusions

In summary, we have considered spin-dependent coherent transport in a double quantum dot system sandwiched between two-dimensional electron gases in doped quantum wells. We have found that for relatively small interdot separation the narrow Dicke conductance peak develops well-resolved spin structures even for very small Zeemal splitting of quantum dot energy levels. We also show that this spin structure is inhibited by Aharonov-Bohm flux through closed electron tunneling pathways.

Acknowledgments

This work was supported by State Committee of Science, Republic of Armenia.

LITERATURE

1 A. Yacoby, M. Heiblum, D. Mahalu, and H. Shtrikman, Phys. Rev. Lett. 74, 4047 (1995).

2 R. Schuster et al., Nature 385, 417 (1997).

3 E. Buks et al., Nature 391, 871 (1998).

4 T. V. Shahbazyan and M. E. Raikh, Phys. Rev. B 49, 17123 (1994).

5 A. W. Holleitner et al., Phys. Rev. Lett. 87, 256802 (2001).

6 M. Sigrist et al., Phys. Rev. Lett. 96, 036804 (2006).

7 T. Hatano et al., Phys. Rev. Lett. 106, 076801 (2011).

8 D. Loss and E. V. Sukhorukov, Phys. Rev. Lett. 84, 1035 (2000).

9 J. König and Y. Gefen, Phys. Rev. Lett. 86, 3855 (2001).

10 T. Brandes, Phys. Rep. **408**, 315 (2005), and references therein.

11 B. Kubala and J. König, Phys. Rev. B **65**, 245301 (2002).

12 T. Vorrath and T. Brandes, Phys. Rev. B **68**, 035309 (2003).

13 M. L. L. de Guevara, F. Claro, and P. A. Orellana, Phys. Rev. B **67**, 195335 (2003).

14 R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).

15 R. G. DeVoe and R. G. Brewer, Phys. Rev. Lett. **76**, 2049 (1996).

16 T. V. Shahbazyan and S. E. Ulloa, Phys. Rev. B **57**, 6642 (1998).

17 J. A. Folk, R. M. Potok, C. M. Marcus, and V. Umansky, Science **299**, 679 (2003).

18 R. Hanson, B. Witkamp, L. M. K. Vandersypen, L. H. Willems van Beveren, J. M. Elzerman, and L. P. Kouwenhoven, Phys. Rev. Lett. **91**, 196802 (2003).

19 R. Hanson, L. M. K. Vandersypen, L. H. Willems van Beveren, J. M. Elzerman, I. T. Vink, and L. P. Kouwenhoven, Phys. Rev. B **70**, 241304(R) (2004).

20 R. Hanson, L. H. Willems van Beveren, I. T. Vink, J. M. Elzerman, W. J. M. Naber, F. H. L. Koppens, L. P. Kouwenhoven, and L. M. K. Vandersypen, Phys. Rev. Lett. **94**, 196802 (2005).

21 S. Amasha, K. MacLean, Iuliana P. Radu, D. M. Zumbjhl, M. A. Kastner, M. P. Hanson, and A. C. Gossard, Phys. Rev. B **78**, 041306(R) (2008).

22 T. Otsuka, E. Abe, Y. Iye, and S. Katsumoto, Phys. Rev. B **79**, 195313 (2009).

23 P. Stano and P. Jacquod, Phys. Rev. B **82**, 125309 (2010).

24 M. Yamagishi, N. Watase, M. Hashisaka, K. Muraki, and T. Fujisawa, Phys. Rev. B **90**, 035306 (2014).

25 H.-Y. Chen, V. Apalkov, and T. Chakraborty, J. Phys.: Condens. Matter **20**, 135221 (2008).

КОГЕРЕНТНЫЙ ТРАНСПОРТ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ КВАНТОВЫХ ТОЧЕК

Л.С. Петросян

АННОТАЦИЯ

Изучено зависящее от спина резонансное туннелирование в системе двух квантовых точек, расположенных между легированными квантовыми ямами. В когерентном (Дикке) режиме, когда расстояние между квантовыми точками меньше, чем длина волны Ферми в двумерном электронном газе в квантовых ямах, наличие магнитного поля в плоскости ям, приводит к выраженной спин – зависящей структуре формы пика проводимости даже при очень малых Зеемановских расщеплениях резонансных уровней квантовых точек. Показано также, что Ааронов-Бомовский поток через площадь, заключенную внутри замкнутых траекторий электрона, полностью разрушает спиновую структуру проводимости.

ԿՈՀԵՐԵՆՏԱՅԻՆ ԱՆՑՈՒՄԸ ԵՐԿՈՒ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ԿԵՏԻՑ ԲԱՂԿԱՑԱԾ ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՒՄ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Լ.Ս. Պետրոսյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ուսումնասիրված է սպինից կախված ռեզոնանսային թունելավորումը երկու քվանտային կետի համակարգում, որոնք տեղադրված են լեգիրացված քվանտային փոսերում: Կոհերենտ (Դիքզե) ռեժիմում, երբ քվանտային կետերի միջև հեռավորությունը ավելի փոքր է, քան Ֆերմի ալիքի երկարությունը երկչափանի էլոկտրոնային գազում քվանտային փսերում, փոսերի հարթության վրա մագնիսական դաշտի առկայությունը հանգեցնում է արտահայտված, սպինից կախված անցման պիկի ձևի կառուցվածքին քվանտային կետերի ռեզոնանսային մակարդակների ճեղքումների նույնիսկ շատ փոքր Զեմանովյան մակարդակների դեպքում: Յույց է տրվում նաև, որ Աարոնով-Բոմովյան հոսքը էլեկտրոնի փակ հետագծի միջև փակ մակերեսի միջով ամբողջովին քանդում է անցողականության սպինային կառուցվածքը:

БИОЛОГИЯ

УДК 612.821.1 Поступила 01.06.2015г.

ОСОБЕННОСТИ СЕНСОМОТОРНОГО РЕАГИРОВАНИЯ У ИСПЫТУЕМЫХ СРЕДНЕГО ВОЗРАСТА ДО И ПОСЛЕ УМСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ С УЧЕТОМ ИНДИВИДУАЛЬНО-ТИПОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

А.А. Туманян

Институт физиологии им.Л.А. Орбели НАН РА (Ереван, Армения)
e-mail: tumanyanaa@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассмотрена динамика показателей простой зрительно-моторной реакции до и после умственной деятельности (длительность 60 минут) у испытуемых среднего возраста (24 человека: от 42 до 65 лет) с учетом индивидуально-типологических особенностей. Показаны групповые различия поведенческой реакции между экстравертами и интровертами. Установлено, что экстраверты, по сравнению с интровертами, характеризуются более высокой скоростью сенсомоторного реагирования и большей лабильностью нервных процессов. У них сравнительно высокий уровень функциональных возможностей. Интроверты отличаются большей стабильностью и уравновешенностью нервных процессов. Отмеченные различия между двумя группами проявляются как до, так и после умственной деятельности. Выявлено, что после умственной деятельности у обеих групп увеличивается скорость и стабильность сенсомоторного реагирования за счет мобилизации функциональных резервов. В результате этого, у испытуемых проявляются признаки утомления, что более выражено у экстравертов.

Ключевые слова: функциональное состояние, сенсомоторное реагирование, индивидуально-типологические различия.

Введение

Понятие «индивидуально-типологические особенности» является предметом изучения психологии индивидуальных различий между людьми. Однако данную проблему важно изучать не только в психологии, но и в психофизиологии – в контексте анализа взаимосвязи индивидуально-типологических особенностей и поведенческих реакций, которые, в свою очередь, зави-

сят от свойств нервной системы [1]. Исследования индивидуально-типологических особенностей людей среднего возраста являются важными и актуальными в практическом отношении. Эти исследования, в первую очередь, могут быть условием решения таких задач, как оптимизация деятельности, повышение качества умственной работоспособности и т.д. Следует отметить, что работы, посвященные изучению данной проблемы, немногочисленны.

Оценка функционального состояния (ФС) ЦНС неизбежно опосредована исследованием разнообразных физиологических систем организма и поведения, проявляющегося в параметрах его ответных реакций и являющегося конечным выражением деятельности нервной системы [2]. На сегодняшний день существует много способов изучения поведенческих реакций для оценки ФС человека. Наиболее простым, доступным и в то же время достаточно точным является методика регистрации времени зрительно-моторной реакции [3]. По времени зрительно-моторной реакции можно судить не только об общем ФС ЦНС: оно также дает представление о способности формирования функциональных систем, служит индикатором подвижности, устойчивости нервных процессов и уровня функциональных возможностей [4, 5].

Целью настоящей работы являлось изучение показателей простой зрительно-моторной реакции при длительной умственной деятельности у испытуемых среднего возраста с учетом индивидуально-типологических особенностей.

В задачи исследования входило: 1) выявление различий показателей ПЗМР, в зависимости от индивидуально-типологических особенностей; 2) проведение сравнительного анализа показателей ПЗМР у всех испытуемых до и после умственной деятельности.

Материалы и методы

В исследовании принимали участие 24 практически здоровых испытуемых – добровольцев в возрасте от 42 до 65 лет. До начала исследования у испытуемых определялся индивидуально-психологический тип личности по личностному опроснику Г. Айзенка [6]. Опросник состоит из 57 вопросов, на которые испытуемый должен ответить либо «да», либо «нет». Согласно результатам опроса, испытуемые были разделены на 2 группы: экстраверты и интроверты. По тесту Т. Элерса «Мотивация к успеху» определялся уровень мотивации у двух групп испытуемых [7], шкала опросника выглядит следующим образом: от 1 до 10 баллов – низкая мотивация к достижению успеха; от 11 до 16 баллов – средний уровень мотивации к достижению успеха; от 17 до

20 баллов – умеренно высокий уровень мотивации к достижению успеха; свыше 21 балла – слишком высокий уровень мотивации к достижению успеха.

В основном цикле исследований была использована компьютерная реализация зрительно-моторной пробы по тесту «Рефлексометрия» [8]. Время простой зрительно-моторной реакции (ПЗМР) оценивалось дважды – до (T_0) и после умственной деятельности (T_1). Продолжительность умственной деятельности (тестовые задания умственного характера) составила 60 минут. Испытуемому последовательно предъявлялись стимулы – квадрат желтого цвета, размером 3х3 см в центре монитора на синем фоне экрана. При появлении стимула необходимо было как можно быстрее нажать на соответствующую кнопку. Стимулы предъявлялись аритмично, с межстимульным интервалом от 1 до 3 сек. Количество полезных сигналов составляло 256. Средняя продолжительность теста составляла 6±1 минут, что зависело от количества ошибок опережения (в случае опережения заданного временного лимита) и запаздывания (в случае превышения заданного временного лимита), по которому рассчитывались показатели, свидетельствующие о признаках перевозбуждения (ПВ) или пароксизмальной заторможенности (ПЗ), соответственно.

По завершении теста программа выдавала графический отчет о результатах теста – гистограмму распределения времени зрительно-моторных реакций. Рассчитывались следующие статистические показатели: среднее значение времени реакции, медиана, мода, стандартное отклонение среднего, дисперсия, вариационный размах. С учетом латентного периода был рассмотрен ряд функциональных показателей: показатель процессов нейродинамики (ППН), сила процессов возбуждения (СПВ), функциональные возможности ЦНС (ФВ ЦНС) и обобщающий показатель – индекс функционального состояния ЦНС (ИФС ЦНС). Также рассчитывались признаки утомления (ПУ) при выполнении теста (по анализу линейной регрессии).

Достоверность различий определялась по t-критерию Стьюдента. Для обработки результатов использовали пакет статистических программ «SPSS16.0.2» и «MSExcel 2007»

Результаты и их обсуждение

Анализ теста Т. Элерса «Мотивация к успеху» показал, что у обеих групп уровень мотивации умеренно высокий. Так, у экстравертов уровень мотивации соответствовал 19,21±0,79 баллам, у интровертов – 17,13±0,87 баллам. Сравнительно высокий уровень мотивации у экстравертов говорит об их активности, способности быстро реагировать на любую ситуацию, о желании достичь высоких результатов деятельности.

Известно, что время сенсомоторной реакции отражает скорость ответных реакций, то есть активность сформированной функциональной системы, специфичной для каждого психологического типа личности [9, 10]. Сравнительный анализ показателей сенсомоторной пробы выявил некоторые различия в исследуемых группах (Табл.1).

Таблица 1

Данные частотного анализа времени ПЗМР у исследуемых групп до (T_0) и после (T_1) умственной деятельности

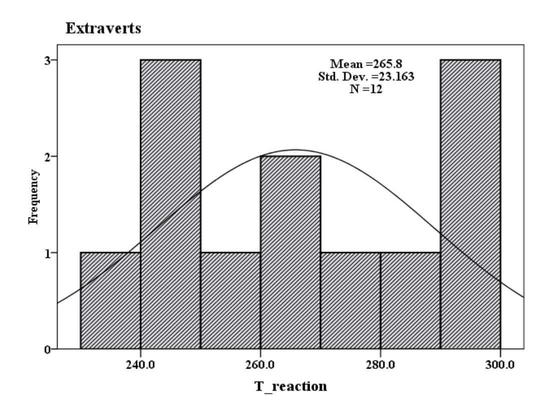
Показатели (в мсек)	**T_0**		**T_1**	
	Экстраверты	**Интроверты**	**Экстраверты**	**Интроверты**
Mx	282,7	291,7	278,3	281,9
Me	279,8	296,0	279,7	276,6
Mo	250,1	252,9	270,3	272,5
SD	27,0	20,9	23,1	13,8
Dx	731,0	442,6	533,9	190,9
R	66,5	81,3	73,5	38,6
min	250,1	252,9	235,0	267,5
max	316,6	334,2	308,5	306,1

Примечание: Mx – среднее значение времени реакции выборки, Me – медиана, Mo – мода, SD – стандартное отклонение среднего, Dx – дисперсия, R – вариационный размах, min – минимальное значение, max– максимальное значение.

Как видно из Таблицы, до умственной деятельности (T_0) у экстравертов, по сравнению с интровертами, среднее значение времени ПЗМР меньше на 3,2%. Структурные средние – медиана и мода, также ниже у этой группы. Значения показателей вариации, отражающие стабильность нервных процессов, у экстравертов значительно превышают величины показателей у интровертов. Так, у экстравертов SD больше на 22,6%, Dx – на 39,5%. То есть высокая скорость реагирования у экстравертов сочетается с низкой стабильностью нервных процессов. Отмеченное превосходство скорости сенсомоторного реагирования у экстравертов наиболее четко выражено на гистограммах частотного анализа (рис.1).

Как видно из Рисунка, средний показатель времени реакции составляет 282,7±27,0 мсек и 291,7±20,9 мсек у экстравертов и интровертов, соответственно. При этом диапозон нормы показателя времени реакции в группе экстравертов ниже и находится в пределах 251,1–280,5 мсек, а у интровертов диапозон несколько выше и колеблется между 264,1–298,4 мсек. Таким образом, частотный анализ также подтверждает превосходство экстравертов в высокой скорости сенсомоторного реагирования. Кривая плотности, которая

дает информацию о преобладающей величине исследуемого показателя, в обеих группах соответствует нормальному распределению.



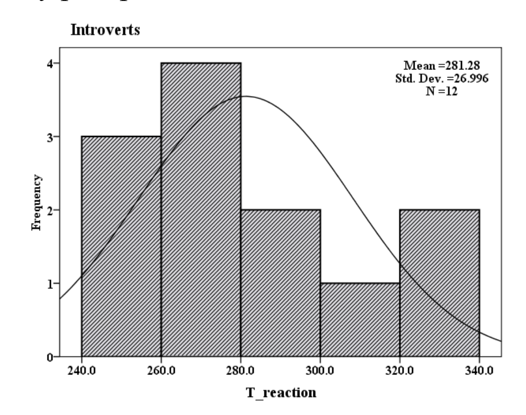
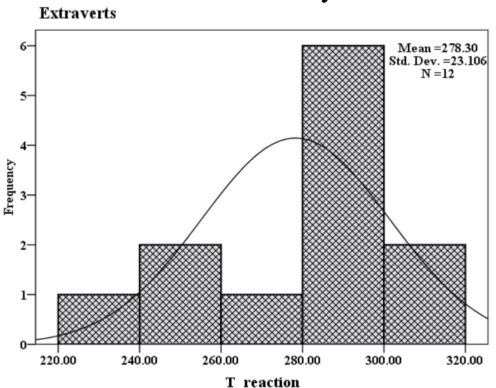


Рис.1 Гистограмма частотного распределения показателя и кривая плотности времени реакции в исследуемых группах до умственной деятельности (T_0). По оси абсцисс – значения времени реакции с определенными частотами; по оси ординат – количество респондентов с соответствующей выраженностью показателя. Доверительный интервал выборки представлен с 0,95%-й вероятностью.
Обозначение: T_reaction – время реакции.

После умственной деятельности наблюдается укорочение времени реакции у обеих групп: среднее значение времени реакции у экстравертов снизилось на 1,6%, а у интровертов – на 3,4% (Табл.1). Несмотря на то, что средний показатель времени реакции у обеих групп снизился, тем не менее, в группе экстравертов количество испытуемых с низкой скоростью сенсомоторного реагирования увеличилось. В группе интровертов наблюдается обратная картина – увеличение количества испытуемых с высокой скоростью реагирования (Рис.2).



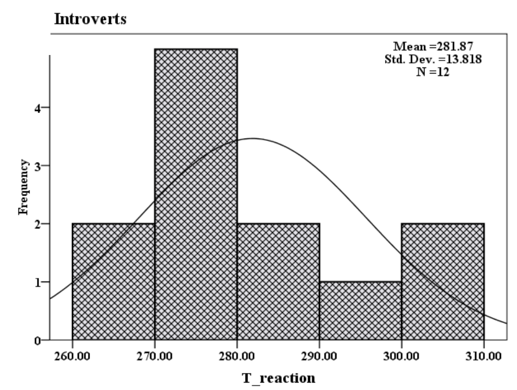


Рис.2 Гистограмма частотного распределения показателя и кривая плотности времени реакции в исследуемых группах после умственной деятельности (T_1). По оси абсцисс – значения времени реакции с определенными частотами; по оси ординат – количество респондентов с соответствующей выраженностью показателя. Доверительный интервал выборки представлен с 0,95%-ой вероятностью.
Обозначение: T_reaction – время реакции

В T_1 наблюдается также сдвиг диапозона нормы показателя времени в обеих группах: у экстравертов он находится в пределах 263,6–293,0 мсек, у интровертов – в пределах 273,1–290,6 мсек. Стабильность сенсомоторного реагирования у обеих групп после умственной деятельности повышается, о чем говорит уменьшение значений SD и Dx. У экстравертов SD снизилось на 14,4% и Dx – на 27,0%, а у интровертов – на 34,0% и на 56,9%, соответственно. Тем не менее, межгрупповые различия в показателях сохраняются и после умственной деятельности.

Интересная картина наблюдается при анализе функциональных показателей, динамика которых представлена в Таблице 2. У экстравертов, по сравнению с интровертами, наблюдаются более высокие функциональные показатели как до, так и после умственной нагрузки. Причем, в T_0 эта разница носит достоверный характер ($p<0,05$) для всех показателей. Так до умственной нагрузки у экстравертов ППН выше на 5,6%, СПВ – на 29,0%, ФВ – на 15,7% и ИФС – на 15,0%. Однако после умственной нагрузки эта разница в показателях между группами уменьшается наполовину (ППН выше на 5,3%, СПВ – на 11,8%, ФВ – на 7,3% и ИФС – на 8,3%). В зависимости от этапа исследования, данные показатели у групп изменяются следующим образом. Если у экстравертов функциональные показатели уменьшаются после умственной нагрузки, то у интровертов наблюдается обратная тенденция – увеличение данных показателей.

Таблица 2

Функциональные показатели ПЗМР у экстравертов и интровертов до и после умственной деятельности

Показатели (в усл.ед.)	**T_0**		**T_1**	
	экстраверты (n=12)	**интроверты (n=12)**	**экстраверты (n=12)**	**интроверты (n=12)**
ППН	3,57 ±0,27	3,37±0,26*	3,58±0,37	3,39±0,50
СПВ	1,38±0,49	0,98±0,46*	1,27±0,52	1,12±0,73
ФВ	2,68±0,54	2,26±0,56*	2,59±0,63	2,40±0,83
ИФС	1,73±0,29	1,47±0,29*	1,68±0,35	1,54±0,47

Примечание: расшифровку аббревиатур см. в разделе «Материал и методы».
* – достоверность различий между экстравертами и интровертами (* - $p<0,05$).

На рисунке 3 представлено соотношение ПВ и ПЗ у исследуемых групп. Как видно из Рисунка, у экстравертов ПВ на двух этапах исследования выше, чем у интровертов. Так, в T_0 ПВ больше на 25,4%, а в T_1 – на 44,1%. В то же время, ПЗ преобладает у интровертов: на 72,4% при T_0 и на 53,8% при T_1. Различия показателей между группами носят достоверный ха-

рактер (p<0,001). Если рассматривать внутригрупповое соотношение ПВ и ПЗ, то можно увидеть, что у экстравертов на обоих этапах исследования доля ПВ преобладает над ПЗ, а у интровертов – наоборот.

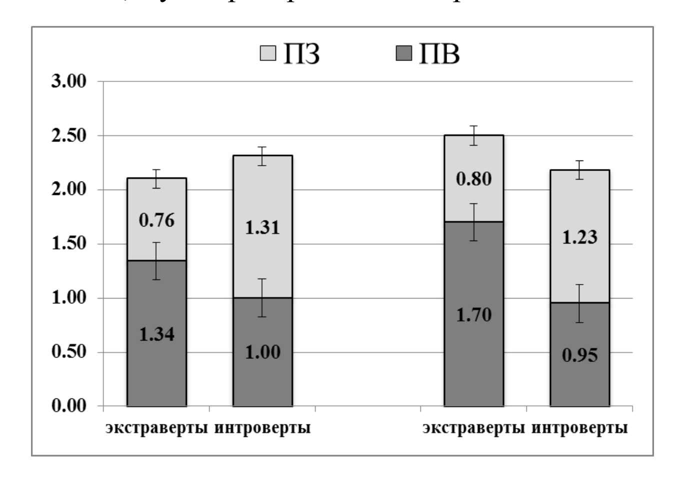
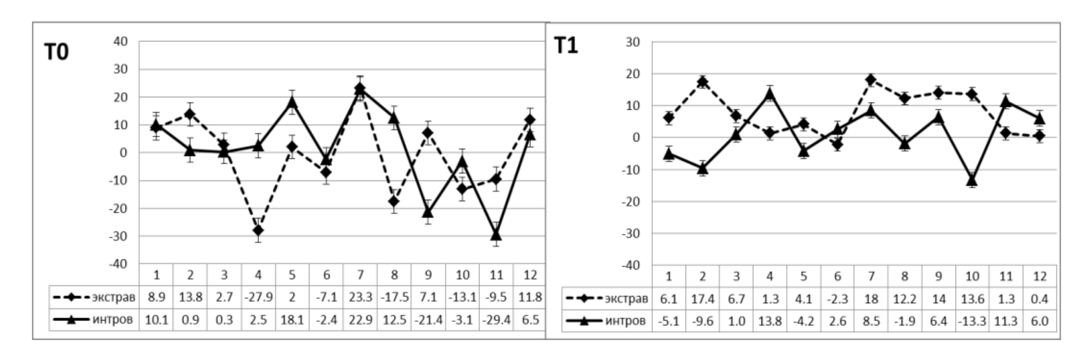


Рис.3 Соотношение ПВ и ПЗ у экстравертов и интровертов до и после умственной деятельности. Линии погрешности показаны с 95%-ой значимостью.

После умственной деятельности у экстравертов значительно увеличилось количество ошибок опережения (ПВ) – на 26,9% и запаздывания (ПЗ) – на 5,3%. У интровертов количество ошибок уменьшилось, однако данные изменения несущественны. Динамика данных показателей, по всей вероятности, связана с проявлением признаков утомления у исследуемых групп после умственной деятельности (Рис.4).



T0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
экстрав	8.9	13.8	2.7	-27.9	2	-7.1	23.3	-17.5	7.1	-13.1	-9.5	11.8
интров	10.1	0.9	0.3	2.5	18.1	-2.4	22.9	12.5	-21.4	-3.1	-29.4	6.5

T1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
экстрав	6.1	17.4	6.7	1.3	4.1	-2.3	18	12.2	14	13.6	1.3	0.4
интров	-5.1	-9.6	1.0	13.8	-4.2	2.6	8.5	-1.9	6.4	-13.3	11.3	6.0

Рис.4 Динамика показателя ПУ у экстравертов и интровертов до (T_0) и после (T_1) умственной деятельности. Линии погрешности показаны с 95%-й значимостью.

Шкала показателя ПУ определена по анализу линейной регрессии, согласно которой, значения ПУ от -40 до 0 соответствуют усвоению ритма, от

0 до 5 – отсутствию утомления, от 5 до 10 – умеренному утомлению, от 10 до 40 – выраженному утомлению.

До умственной деятельности в показателе ПУ между исследуемыми группами существенной разницы не отмечается. У большинства испытуемых обеих групп наблюдается низкий уровень утомления, при котором значения показателя ПУ соответствуют шкале усвоения ритма. Однако после умственной деятельности у экстравертов отмечается значительное изменение показателя ПУ. У большинства испытуемых этой группы проявляется умеренное и выраженное утомление. Интересен тот факт, что у интровертов, как отмечалось выше, показатели вариативности, отражающие стабильность сенсомоторного реагирования, сравнительно низкие и, вместе с тем, у них менее выражены ПУ. Следует отметить, что у них от T_0 к T_1 существенных изменений ПУ не происходит, то есть они более устойчивы к длительной умственной деятельности.

Таким образом, экстраверты показали более высокую скорость реагирования по сравнению с интровертами на обоих этапах исследования. У них также меньше значения структурных средних. Данный факт говорит о большей лабильности нервных процессов, о высокой скорости восприятия и обработки информации у этой группы [11]. У экстравертов также выше уровень функциональных возможностей ЦНС как до, так и после умственной деятельности. Однако интроверты отличаются большей стабильностью сенсомоторного реагирования, у них также более уравновешены нервные процессы, о чем свидетельствует динамика вариативности на двух этапах исследования. Об уравновешенности нервных процессов говорит и соотношение показателей ПВ и ПЗ у этой группы. Данные показатели различаются у них незначительно, чего нельзя сказать об экстравертах. Здесь число опережений (ПВ) превышает число запаздываний (ПЗ), что указывает на неуравновешенность нервных процессов с преобладанием силы возбуждения.

После умственной деятельности у обеих групп отмечается увеличение скорости реагирования, свидетельствующее о повышении функциональной активности ЦНС и увеличении скорости обработки информации в ЦНС. Вместе с этим у них повышается и стабильность сенсомоторного реагирования. Это, по всей вероятности, связано с процессом привыкания к повторяющейся стимуляции [12]. Однако если у интровертов после умственной деятельности отмечается повышение функциональных показателей и уменьшение количества ошибок опережения и запаздывания (ПВ и ПЗ), то у экстравертов наблюдается обратная картина. Данную тенденцию можно объяснить динамикой показателя ПУ. Если у большинства испытуемых обеих групп до умственной деятельности наблюдался низкий уровень утомления,

то у экстравертов в T_1 проявляется умеренное и выраженное утомление. У интровертов, в зависимости от этапа исследования, ПУ изменяются незначительно, то есть они более выносливы к длительной умственной работе [13]. У данной группы высокий уровень стабильности и уравновешенности нервных процессов сочетаются с низким уровнем утомления.

Таким образом, в зависимости от индивидуально-типологических особенностей испытуемых нами были выявлены значительные изменения поведенческих реакций до и после умственной нагрузки, проявляющиеся и, по всей вероятности, характерные для исследуемой возрастной группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин Е.П.* Психология индивидуальных различий // Учебное пособие для вузов, СПб.: Изд-во «Питер», 701 с., (2011).

2. *Лоскутова Т.Д.* Оценка функционального состояния центральной нервной системы человека по параметрам простой двигательной реакции // «Физиологический журнал СССР», Т.61, № 1. СС. 6–11, (1975).

3. *Королев С.А.* Обучение технико-тактическим действиям в восточных единоборствах на основе смыслового проектирования и решения двигательных задач // С.Н. Минаев, учебное пособие, М-во образования и науки РФ, ГОУВПО «Тамбовский гос. ун-т им. Г.Р. Державина», Тамбов: изд-во ТГУ им. Г.Р. Державина, 240 с., (2011).

4. *Челышкова Т.В., Хасанова Н.Н., Гречишкина С.С., Намитокова А.А., Корник Г.Г., Фролова В.А.* Особенности функционального состояния центральной нервной системы студентов в процессе учебной деятельности // «Вестник Адыгейского государственного университета». Сер. 4: Естественно-математические и технические науки, № 9. СС. 71–77, (2008).

5. *Литовченко О.Г., Арент Е.А.* Хронорефлексометрическая характеристика работоспособности жителей среднего приобья от 7 до 20 лет // «Современные наукоемкие технологии», № 11. СС. 24–28, (2007).

6. *Eysenck H J.* Dimensions of Personality. London, (1947).

7. Методика диагностики мотивации к достижению успеха Т. Элерса / В.А. Розанова Психология управления, М. СС. 105–106, (1999).

8. *Геворкян Э.Г.* Создание методов компьютерной диагностики общего функционального состояния организма, подвергнутого стрессорным перегрузкам // Современные аспекты радиационной медицины и ожогов, Ер. СС. 8–11, (1995).

9. *Лоскутова Т.Д.* Время реакции как психофизиологический метод оценки функционального состояния центральной нервной системы. В кн.: Нейрофизиологические исследования в экспертизе трудоспособности. Л.: изд-во «Медицина». СС. 165–194, (1978).

10. *Небылицын В.Д.* Психофизиологические исследования индивидуальных различий // М.: Изд-во «Наука», 336 с., (1976).

11. *Мыльникова И.В., Ефимова Н.В.* Сравнительная оценка функционального состояния городских и сельских подростков Иркутской области // Успехи современного естествознания. Медицинские науки, №3. СС. 60–64, (2015).

12. *Туманян А.А.* Динамика времени простой зрительно-моторной реакции и показателй вариабельности сердечного ритма при умственной деятельности // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014» / Отв. ред. А.И. Андреев, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс]. М.: МАКС Пресс, (2014).

13. *Григорян В.Г., Агабабян А.Р.* ЭЭГ – показатели функционального состояния оператора при длительной монотонной работе на компьютере // ВНД, Т. 49, № 2. СС. 220–226, (1999).

FEATURES OF SENSORIMOTOR RESPONSE IN MIDDLE-AGED SUBJECTS BEFORE AND AFTER MENTAL ACTIVITY TAKING INTO ACCOUNT INDIVIDUAL TYPOLOGICAL CHARACTERISTICS

A.Tumanyan

SUMMARY

This article dwells on the dynamics of parameters of simple visual-motor reaction in middle-aged subjects (24 subjects, aged 42 to 65) before and after mental activity (duration is 60 minutes) is considered taking into account individual typological features. Group differences of behavioral reaction between extroverts and introverts are shown. It is determined that, as compared with introverts, extroverts are characterized by a higher speed of sensorimotor response and greater lability of the nervous processes. They have a relatively high level of functional capabilities. Introverts are characterized by a greater stability and balance of nervous processes. The differences mentioned between two groups occur both before and after mental activity. It is found that in both groups after mental activity the speed and stability of sensorimotor response increase by mobilizing functional reserves. As a result, the subjects show signs of fatigue which is more pronounced in extroverts.

Keywords: functional state, sensorimotor response, individual typological differences.

ՄՏԱՎՈՐ ԳՈՐԾՈՒՆԵՈՒԹՅՈՒՆԻՑ ԱՌԱՋ ԵՎ ՀԵՏՈ ԶԳԱՅԱՇԱՐԺՈՂԱԿԱՆ ՌԵԱԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՌԱՆՁՆԱՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՄԻՋԻՆ ՏԱՐԻՔԻ ՀԵՏԱԶՈՏՎՈՂՆԵՐԻ ՄՈՏ՝ ՀԱՇՎԻ ԱՌՆԵԼՈՎ ԱՆՀԱՏԱԿԱՆ-ՏԻՊԱՅԻՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԵՐԸ

Ա.Ա.Թումանյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկայացվող հոդվածում դիտարկվել է մտավոր գործունեությունից առաջ և հետո (տևողությունը՝ 60 րոպե) պարզ տեսաշարժողական ռեակցիայի դինամիկան միջին տարիքի (24 մարդ, 42-

ից մինչև 65 տարեկան) հետազոտվողների մոտ՝ հաշվի առնելով նրանց անհատական-տիպային առանձնահատկությունները: Ցույց են տրված վարքագծային ռեակցիայի խմբային տարբերությունները էքստրավերտերի և ինտրավերտերի միջև: Հայտնաբերվել է, որ էքստրավերտերը՝ ի համեմատ ինտրավերտերի, բնութագրվում են զգայաշարժողական ռեակցիայի ավելի բարձր արագությամբ և նյարդային գործընթացների առավել արտահայտված լաբիլականությամբ: Նրանց մոտ արձանագրվել է ֆունկցիոնալ հնարավորությունների համեմատաբար բարձր մակարդակ: Ինտրավերտերը առանձնացել են նյարդային գործընթացների առավել կայունությամբ և հավասարակշռությամբ: Խմբերի միջև նշված տարբերությունները դրսևորվել են ինչպես մտավոր գործունեությունից առաջ, այնպես էլ հետո: Բացահայտված է, որ մտավոր գործունեությունից հետո երկու խմբերի մոտ էլ ավելանում են զգայաշարժողական ռեակցիայի արագությունը և կայունությունը՝ օրգանիզմի ֆունկցիոնալ պաշարների մոբիլիզացիայի հաշվին: Դրա արդյունքում հետազոտվողների մոտ դրսևորվում են հոգնածության երևույթներ, որը ավելի ցայտուն արտահայտված է էքստրավերտերի մոտ:

Հիմնաբառեր՝ ֆունկցիոնալ վիճակ, զգայաշարժողական հակազդումներ, անհատական-տիպային առանձնահատկություններ:

ЭКОЛОГИЯ

УДК 574.9 (479.25) Поступила 10.02.2015г.

ВЛИЯНИЕ ЭКОТУРИЗМА НА КРАСНОКНИЖНЫЕ ВИДЫ ОРНИТОФАУНЫ НАЦИОНАЛЬНЫХ ПАРКОВ АРПИ ЛИЧ И СЕВАН: ЭКОЛОГО-ФАУНИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Г.Т. Макичян

Российско-Армянский(Славянский) университет
goka_m@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Особо охраняемые природные территории (ООПТ) и, в частности, национальные парки обеспечиваются посредством сохранения биологического разнообразия (особенно редких и исчезающих видов), мониторинга экосистем, благоприятных предпосылок для восстановления и воспроизводства экосистем, рационального и систематизированного использования природных ресурсов.

На территориях ООПТ биоразнообразие имеет наиболее важное значение, так как каждая потеря вида растительного и животного мира, особенно краснокнижного, может привести к нарушению баланса экосистемы. Антропогенные факторы, воздействующие на биотопы растительного и животного мира, являются основной проблемой сохранения биоразнообразия в современный период.

***Ключевые слова*:** биоразнообразие, ООПТ, экотуризм, орнитофауна.

Введение

В ООПТ РА, кроме заповедников, заказников и природных памятников, входят также национальные парки. Национальные парки являются природоохранными, эколого-просветительскими и научно-исследовательскими учреждениями, территории которых включают в себя природные комплексы и объекты, имеющие особую экологическую, историческую и эстетическую ценность и предназначенные для использования в природоохранных, просветительских, научных и культурных целях [1]. По сравнению с заповедниками, национальные парки, кроме заказниковых и заповедных зон, имеют

также зоны рекреациии и зоны экологического и познавательного туризма. Одним из основных способов описания биоразнообразия является мониторинг, который во многих случаях, к сожалению, систематически не проводится, что, в свою очередь, приводит к неполноценным данным как по краснокнижным, так и по остальным видам.

В настоящей работе проведен сравнительный анализ краснокнижных видов орнитафауны в национальных парках «Арпи лич» и «Севан» и выявлено возможное влияние экотуризма на биотопы данных видов.

Национальный парк «Арпи лич» находится на территории Ширакского марза, который отличается жестким и сухим климатом, несмотря на это, бассейн и близлежащие территории озера Арпи отличаются богатым разнообразием флоры и фауны, многие виды которых в данном ООПТ считаются редкими и исчезающими (включены в Красную книгу Армении, а также в Международный Союз Охраны Природы (МСОП)). В национальном парке «Арпи лич» насчитывается порядка 190 видов птиц, из которых 120 регулярно размножаются и более 100 видов мигрируют в осенние и весенние периоды, а также примерно 70 видов зимующих птиц [8].

Национальный парк «Севан» находится на территории Гегаркунийского марза. Данная территория насчитывает порядка 180 видов птиц, из которых 35 видов являются краснокнижными (9) и во время весенне-летней миграции встечаются также в национальном парке «Арпи лич».

Материалы и методы

Для сравнения параметров сходства видового состава краснокнижных видов орнитофауны двух национальных парков был использован «зоогеографический» метод расчета коэффицента Стугрена-Радулеску, имеющего следующий вид [2]

$$P_{sr} = \frac{A+B-C}{A+B+C} \quad (1)$$

где:

A – число видов, встречающихся на первой территории, но отсутствующих во второй;

B – число видов, встречающихся на второй территории, но отсутствующих в первой;

C – число видов, встречающихся наобеих территориях.

Кантинуум коэффициента варьирует от -1 до +1. Пределы -1 до 0 свидетельствуют о полном сходстве видов в определенных территориях. Преде-

лы 0 до +1 показывают соответствующие различия. При значении $\rho_{sr}<0$, в качестве меры сходства берутся абсолютные значения коэффициента.

В качестве коэффициента встречаемости видового состава краснокнижной орнитофауны в национальных парках «Арпи лич» и «Севан» использовался коэффициент Жаккара [3], описывающийся уравнением:

$$K_J = \frac{C}{A+B-C} \qquad (2)$$

где:

А – количество видов на первой территории,

В – количество видов на второй территории,

С – количество видов общих для 1-й и 2-й территорий.

Пределы данного коэффициента от 0 до 1, значение K_j =1 свидетельствует о полном сходстве а Kj=0 означает, что они не имеют ни одного общего вида.

Результаты и обсуждения.

В настоящее время в Республике Армения в качестве одного из передовых направлений развития туристической отрасли является экотуризм и, в частности, наблюдение за орнитофауной, так как Армения и находящиеся в нем ООПТ представляются разнообразием как перелетных, так и оседлых типов птиц. При таком подходе важнейшей задачей является направленный мониторинг как краснокнижных видов, так и остальных. Нужно отметить, что в доступной литературе о результатах, проведенных мониторингов в ООПТ и, в частности, в национальных парках недостаточны, что, в свою очередь, создает определенные трудности при проведении сравнительных анализов. Как пример можно привести национальный парк «Аревик», созданный в 2009 году, где, к сожалению, нет полноценной информации о биоразнообразии, а также эко-топографических данных [4].

Выбор данных национальных парков обусловленны тем, что они сравнимы между собой как географическими показателями так и наличием водно-болитистых угодий. С точки зрения высотных показателей_национальный парк «Арпи лич» находится на высоте 1500–3100м., а национальный парк «Севан» – 1750–3597м. Различиями являются климатические характеристики. Как известно, климат «Арпи лич» довольно суровый, резко континентальный. Средняя температура колеблется от + 22 (летом) до –38 (зимой) [5]. По сравнению с «Арпи Лич» климат национального парка «Севан» достаточно теплый и мягкий. Средняя температура зимой – 9°C летом +25°C. [6].

Кроме вышеперечисленных показателей, данные ООПТ сравнимы между собой также количеством видов орнитофауны.

***Эколого-фаунистический анализ краснокнижной орнитофауны*:**

Из 190 видов обитающих птиц, биотопы которых находятся в национальном парке «Арпи лич», 17 видов включены в Красную книгу РА и МСОП. Ими являются: поганка серощекая (Podiceps grisegena), пеликан розовый (Pelecanus onocrotalus), пеликан кудрявый (Pelecanus *crispus*), большой баклан (Phalacrocorax carbo), каравайка (Plegadis falcinellus), колпиц (Platalea leucorodia), серый гусь (Anser anser), гусь белолобый (Anser albifrons), огарь (Tadorna ferruginea), пеганка (Tadorna tadorna), широконоска (Anas clypeata), серый журавль (Grus grus), большой веретенник (Limosa limosa), дупель (Gallinago media), ходулочник (Himantopus himantopus), армянская чайка (Larus armenicus), трясогузка желтоголовая (Motacilla citreola). [7]. Из данных видов птиц многие являются перелетными.

Из 180 видов, обитающих птиц в национальном парке «Севан», 35 видов являются краснокнижными и также включены в МСОП. Это: поганка серощекая (Podiceps grisegena), пеликан розовый (Pelecanus onocrotalus), пеликан кудрявый (Pelecanus *crispus*), большой баклан (Phalacrocorax carbo), малый баклан (Phalacrocorax pygmeus), каравайка (Plegadis falcinellus), колпиц (Platalea leucorodia), фламинго (Phoenicopterus), лебедь шипун (Cygnus olor), лебедь кликун (Cygnus cygnus), серый гусь (Anser anser), пискулька (Anser erythropus), белолобый гусь (Anser albifrons), казарка краснозобая (Branta ruficollis огарь (Tadorna ferruginea), пеганка (Tadorna tadorna), широконоска (Anas clypeata), чернеть белоглазая (Aythya nyroca), турпан (Melanitta fusca Thorburn), орлан-белохвост (Haliaeetus albicilla), стервятник (Marvel Comics), степной лунь (Circus macrourus), подорлик малый (Aquila pomarina), балобан (Falco cherrug), серый журавль (Grus grus), кулик-сорока (Haematopus ostralegus), большой веретенник (Limosa limosa), большой кроншнеп (Numenius arquata), дупель (Gallinago media), ходулочник (Himantopus himantopus), шипоклювка (Acanthiza apicalis), степная тиркушка (Glareola nordmanni), армянская чайка (Larus armenicus), крачка белощекая (Chlidonias hybrida), трясогузка желтоголовая (Motacilla citreola). [7]. Из вышеперечисленных некоторые виды являются перелетными

Вышеприведенные данные свидетельствуют, что в обоих ООПТ количество встречаемых краснокнижных видов составляет 48,6%, из которых 9 видов (53%) составляют водоплавающие, 8 видов (47%) – водно-болотные. По критериям образа жизни 76% являются перелетными, а остальные 24% – оседлые, одним из ярких примеров которого является эндемичный вид «Армянской чайки», биотопы которого находятся на территории национального парка

Севан. В последние годы, по данным Красной книги РА (2010), гнездовья чаек обнаружены также на территории национального парка «Арпи лич».

Для сравнения видового состава краснокнижных видов орнитофауны нами были расчитаны коэффициенты, показывающие сходство двух национальных парков по признаку идентичности краснокнижной орнитофауны. Результаты расчетов показаны в таблице 1.

Таблица 1

Сравнение видового состава краснокнижной орнитофауны Арпи лич и Севан
(Значения коэффициентов Жаккара, и Стугрена-Радулеску)

Всеговидов	Общиевиды	Специфические виды	K_j	ρ_{SR}
35	17	18	0.48	0.02

Необходимо отметить, что национальные парки «Севан» и «Арпи лич» практически идентичны по критериям встречаемости краснокнижных видов орнитофауны. Об этом свидетельствуют также полученные значение коэффициентов сходства (коэффициент Стугрена-Радулеску ρ_{SR}) и коэффициент встречаемости (коэффициент Жаккара K_j).

По критериям МСОП, из 17 вышеприведенных видов наибольшее количество – 9 видов, которое составляет 53% от общего числа являются «уязвимыми», из которых 6 видов относятся по критерию «уязвимый» VUB1ab (iii) +2a(iii), 5 вида «уязвимый» VU D1, 2 вида «уязвимый» VU B1ab(iii) и 1 вид «уязвимый» VU A2b. В данные критерии входят как водоплавающие, так и водно-болотные типы птиц. Из 17 рассматриваемых видов птиц 3 из них по критериям МСОП, считаются «под угрозой исчезновения» (EN D), к ним относятся пеликан кудрявый, колпиц и серый журавль. Данные виды птиц являются перелетными.

Помимо рассматриваемых, 17 видов орнитофауны, которые встречаются в обоих национальных парках, в национальном парке «Севан» наблюдаются еще 18 видов краснокнижных видов птиц, которые не встречаются в национальном парке Арпи лич. Из вышесказанных 18 видов 6 видов (33%) являются водоплавающими, 7 видов (39%) – хордовыми, 3 вида (17%) являются хищниками и 1 вид водно-болотным (6%). По образу жизни приблизительно 90% являются перелетными, а осталыные 10% – оседлые.

По критериям МСОП, 9 видов из 18, что составляет 50%, являются «уязвимыми», однако в данные критерии отличаются по категориям: 4 вида относятся к категории «уязвимые» VU D1, 3 вида – «уязвимые» VU A2bcd+3bcd+4bcd и по 1 виду на «уязвимые» B1 ab(iii) и VU A2b. В дан-

ные критерии входят как водоплавающие, так и хищними и хордовые типы птиц. Из 18 видов орнитофауны 5 видов (27%) находятся под угрозой исчезновения, 2 вида из которых относится к категории EN A2bcd+3bcd+4bcd и по 1 виду: EN B1a, D; EN A2bcde+3bcde+4bcde; B1 ab3+2ab(iii), D. В рассматриваемых 18 видах краснокнижных птиц 2 вида не имеют дастаточных данных и входят по критерию МСОП под «недостаточность данных» DD.

Принимая во внимание схожесть вышесказанных национальных парков с точки зрения идентичности видов краснокнижной орнитофауны, рекомендации, приведенные ниже, будут идентичными для обоих исследуемых национальных парков.

Влияние экотуризма на краснокнижные виды орнитофауны в национальных парках «Севан» и «Арпи лич»

В настоящее время в Армении быстрыми темпами развивается область экотуризма – наблюдение за орнитофауной, который имеет термин “*Birdwatching”*. Он считается одним из тех типов экотуризма, который наносит минимальный вред экосистеме, а также биотопам представителей фауны, обитающих на данной территории.

Несмотря на это, в исследуемых национальных парках, к сожалению, не имеются определенные узкоспециализированные экотуристические маршруты и смотровые площадки для наблюдения за орнитофауной. Вдобавок к этому, в доступной литературе соответствующих данных о мониторинге, в особенности, краснокнижных видов нет или достаточно. Как известно, данные факторы являются основной базой при проведении таких типов экотур.

Многие туристические компании [10–13], которые проводят такие экотуры в национальных парках и, в частности, Севан, не всегда учитывают сезонности посещения, а также периоды гнездовья, что в свою очередь приводит к нарушениям нормальной жизнедеятельности птиц. При этом отсутствие нормативов при проведении наблюдений за орнитофауной (антропогенный фактор) приводит к изменению образа жизни птиц, обитающих на данных биотопах.

При таком раскладе важнейшей задачей является мониторинг и охрана, вособенности, краснокнижных видов, определение нормативов допускаемых временных периодов, создание узкоспециализированных смотровых площадок и троп, применение соответствующей техники при осмотре с определенного расстояния, а также присутствие специалистов-орнитологов при проведении данных мероприятий. Учет нагрузки туристических ресурсов на био-

топы и ведение статистики для дальнейших корректировок как экотроп, так и антропогенной нагрузки на биотопы.

При проведении мероприятий по наблюдению за орнитофауной нужно учитывать следующие факторы: важнейшим является временной фактор – рекомендуется проведение данного типа экотуризма в определенные временные интервалы – это, в основном, конец июня, июль-август, первая половина сентября.

Данные временные интервалы выбраны, исходя из нескольких критериев: первым является время гнездовья и вывод потомства, а также подготовка молодняка к перелету, так как многие краснокнижные виды, обитающие в данных биотопах, являются перелетными. В данные периоды, т.е. с конца марта до второй половины июня, а также со второй половины сентября по октябрь, нецелесообразно проведение экотуров в данных территориях, так как эти периоды являются наиболее уязвимыми для птиц.

При проведении наблюдения за орнитофауной в допустимые временные интервалы необходимо учитывать антропогенные воздействия. Данные факторы можно будет распределить на физико-механические, химико-биологические, субъективные, а также учитывая опасность возникновения пожаров.

Физико-механические факторы воздействия

В качестве физико-механических факторов воздействия на биотопы краснокнижных птиц выступают изменения структур грунта в области экотроп и близлежащих территорий, воздействие которых увеличевается при использовании наземного транспорта. Звуковые колебания моторов автомобилей или шум туристов при посещении мест обитания, а также частичное уничтожение почвенного биоценоза, связанное с проложением маршрута экотропы. Имеет место также визуальный фактор (цвет одежды, жестикуляция и т.д.), в частности, при проведении “birdwatchinga”. Принимая во внимание данные факторы, важным является часто проводимые мониторинги, которые дадут возможность снизить риски воздействия путем изменения тех или иных критериев при проведении таких мероприятий.

Химико-биологические факторы воздействия

При проведении таких мероприятий необходимо учитывать также проблемы, связанные с химико-биологическими факторами – таких, как загрязнение водоемов и близлежащих территорий разными типами мусора, эмиссия газов от наземного транспорта и т.д.

Субъективные факторы воздействия

Субъективными факторами могут являться загрязненные туристами экотропыили изменение маршрута в процессе наблюдения, что крайне недопустимо.

Пожарная опасность

Принимая во внимание сезонность проведения наблюдения за орнитофауной возрастает риск пожаров, связанный с антропогенным и факторами. Так как ресурсы национальных парков больше, чем у заповедников, и в данных ООПТ нет ограничения на ночлег и длительное прибывание, особое внимание должно уделяться сохранению мер пожарной безопасности. С этой точки зрения необходимо проводить тренинги по пожарной безопасности.

Заключение

Проводенный сравнительный анализ показал, что национальные парки «Севан» и «Арпи лич» сравнимы между собой по составу краснокнижных видов орнитофауны. Об этом свидетельствуют полученные коэффициенты сходства видового состава и встречаемости. Нужно отметить, что из 35 видов краснокнижных птиц, находящихся на территории национального парка «Севан», 17 встречаются также на территории национального парка «Арпи лич». В основном это водоплавающие и водно-болотные птицы, многие из которых являются перелетными. Орнитофауна национального парка «Арпи лич», входящая в Красную книгу, и МСОП составляет 30%, а в национальном парке «Севан» – 66.5%, что в 2 раза больше, чем в национальном парке «Арпи лич». Это можно объяснить падением уровня оз. Севан. С точки зрения проведения наблюдений за орнитофауной в данных национальных парках нужно принимать во внимание множество показателей, которые, к сожалению, в настоящее время не всегда учитываются.

Отсутствие полноценных данных мониторинга, особенно краснокнижных видов, затрудняет оценку возможностей проведения экотуризма и, в частности, наблюдения за орнитофауной. Несмотря на это, при правильной организации, а также создании соответствующих инфраструктур, узкоспециализированных экотроп, смотровых площадок и анализа антропогенного воздействия на биотопы в данных ООПТ можно будет проводить соответствующие мероприятия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдасарян А.* Климат Армянской ССР. Ер.: Изд-во Акад. Наук АРМ. ССР, 1958.139с.

2. *Залепухин В.В.* Теоретические аспекты биоразнообразия: Учебное пособие / В.В. Залепухин. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2003. 192 с., С. 169.

3. Красная книга животных Республики Армения-2011.

1. *Мэгарран Э.* Экологическое разнообразие и его измерение / Э. Мэгарран. М.: Мир, 1992. 184 с.

4. Справочник по климату Республики Армения. Вып. 16, ч. IV: Влажность воздуха, осадки и снежный покров. Ер.: Армгосгидромет, 2009. 185с.

5. *Хамякова А.* Статус и функции охраняемых природных территорий. М., Диссертация, 2010.149с

6. http://belovy-da-i-nk.narod.ru/publik/2010/2010-5.htm

7. http://www.armeniabirding.info

8. http://www.lakearpi-nationalpark.com.

9. http://www.sevanpark.am

10. http://www.tacentral.com.

11. http://www.tourismarmenia.org

12. *Makichyan G.* Comparative analysis of biodiversity of especially protected natural areas of Armenia // Известия Национального аграрного университета Армении, 4, 2014. СС. 26–27.

THE IMPACT OF ECOTOURISM ON THE RED BOOK-LISTED SPECIES OF BIRDS IN LAKE ARPI AND SEVAN NATIONAL PARKS: ECO-FAUNISTIC ANALYSIS.

G. Makichyan

SUMMARY

Protected areas (PAs) and in particular national parks are provided by biodiversity (especially the rare and endangered species); ecosystem monitoring; favorable conditions for the restoration and reproduction of ecosystems; rational and systematized use of natural resources.

The biodiversity on PAs has the most important significance, because each loss of species of flora and fauna, especially the Red Book-listed species, can disrupt the balance of the ecosystem. The anthropogenic factors affecting the biotopes of flora and fauna are the major problem for the conservation of biodiversity in the contemporary period.

Keywords**:** biodiversity, PA, ecotourism, ornithofauna.

ԷԿՈՏՈՒՐԻԶՄԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՐՓԻ ԼԻՃ ԵՎ ՍԵՎԱՆ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊԱՐԿԵՐՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ԿԱՐՄԻՐ ԳՐՔՈՒՄ ԳՐԱՆՑՎԱԾ ԹՌՉՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍԱԿՆԵՐԻ ՎՐԱ. ԷԿՈԼՈԳՈ-ՖԱՈՒՆԱՅԻՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆ:

Գ.Տ. Մակիչյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Բնական հատուկ պահպանվող տարածքները (ԲՀՊՏ)՝ ընդ որում ազգային պարկերը, ստեղծված են պահպանել և զարգացնել էկոհամակարգերում առկա կենսաբազմազանությունը՝ հատկապես հազվագյուտ և անհետացող տեսակների համար: Կարևորագույն գործառույթներից են համարվում տվյալ էկոհամակարգերում իրականացվող մոնիթորինգը, էկոհամակարգերի վերականգնման և զարգացման համար բարենպաստ միջավայրի ստեղծումը՝ ռացիոնալ և համակարգված մոտեցումների կիրառմամբ:
Կենդանական և բուսական տեսակների՝ մասնավորապես Կարմիր գրքում գրանցվածների անհետացումը կարող է հանգեցնել տվյալ տարածքների էկոհամակարգերի խաթարմանը և առաջացնել անդառնալի հետևանքներ: Էկոհամակարգերի խաթարման հիմնական պատճառներից է համարվում անթրոպոգեն ազդեցությունը, որի արդյունքում բազմաթիվ կենդանական և բուսական տեսակներ գտնվում են անհետացման վտանգի տակ:
Հիմնաբառեր՝ կենսաբազմազանություն, ԲՀՊՏ, էկոտուրիզմ, օրնիտոֆաունա:

УДК 574.9 (479.25) Поступила 15.06.2015г.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ФАУНЫ ОСОБО ОХРАНЯЕМЫХ ПРИРОДНЫХ ТЕРРИТОРИЙ АРМЕНИИ

Г.Т. Макичян

Российско-Армянский(Славянский) университет
goka_m@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Глобальной задачей современности является сохранение биоразнообразия – разнообразия видов животных и растений, ландшафтов и экосистем. Сохранение биоразнообразия – это не новое направление охраны природы, а неотъемлемая составная часть концепции перехода человечества на принципы устойчивого развития. Основным способом сохранения биологического разнообразия нашей планеты являются особо охраняемые природные территории (ООПТ), а в качестве оценки состояния биоразнообразия выступают мониторинг, анализ и сравнение.

Ключевые слова: биоразнообразие, национальный парк, заповедник, ООПТ.

Введение

ООПТ, как инфраструктура охраны природных комплексов и животного мира в современной экологической обстановке, выполняют бесценную роль резерватов флоры и фауны [1]. Саморегуляция экосистем и экологических процессов на территориях ООПТ не только обеспечивается, но и является залогом стабильности экологической обстановки на прилегающих территориях. Следствием этого может быть выявление новых видов животных, птиц и растений, ранее не отмечавшихся на территориях заповедников и национальных парков, обнаружение новых мест обитания ряда редких растений и животных.

Осознавая значение сохранения биоразнообразия, Республика Армения в 1993г. ратифицировала Конвенцию «О биологическом разнообразии», а в 1999г. подготовила первый Национальный доклад «Стратегию по сохранению биоразнообразия и национальный план действий Республики Армения». В 2002 году Правительством Армении одобрена «Государственная стратегия

развития и национальная программа действий по особо охраняемым природным территориям Армении» [2], согласно которой особо охраняемые природные территории служат особым гарантом сохранения природы и ее составных частей.

ООПТ обеспечивается посредством сохранения биологического разнообразия (особенно редких и исчезающих видов); мониторинга экосистем; благоприятных предпосылок для восстановления и воспроизводства экосистем; рационального и систематизированного использования природных ресурсов.

На территориях ООПТ биоразнообразие имеет наиболее важное значение, так как каждая потеря вида растительного и животного мира может привести к уничтожению экосистемы, а также может влиять на развитие и здоровье человека.

В настоящее время на общей площади Армении имеются 3 заповедника, 4 национальных парка и 27 заказника [3–6]. Территории ООПТ занимают 13.1% от общей территории и включают в себя многочисленные виды эндемиков, представителей флоры и фауны, что имеет неоценимое значение биоразнообразия в мировой экосистеме [7].

Материалы и методы

Для проведения сравнительного анализа полученных результатов по биоразнообразию в заповедниках и национальных парках Армении были применены комплексные статистические методы вычисления. Для определения сравнительных показателей было использовано уравнение «*сигма»,* которое определяет степень разнообразия видового состава [8–9] исследуемых ООПТ, описывающее уравнениями:

$$M = \frac{V}{n} \quad (1)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n-1}} \quad (2)$$

где $x = V - M$, V – общее количество видов в ООПТ, M – среднеарифметический индекс видового состава по признаку (вид), n- число видов в выборке.

В качестве критерия сравнимости видового состава между исследуемых ООПТ был использован коэффициент вариации, выраженный в процентах [10].

$$CV = \frac{\sigma * 100}{M} \quad (3)$$

где σ – степень разнообразия видового состава, M – среднеарифметический индекс видового состава по признаку (вид).

Кроме этого, были рассчитаны также индексы разнообразия видового состава фауны для всех исследуемых ООПТ по рангам, используя информационный индекс разнообразия Шеннона-Уивера [11–12].

$$H^{'} = -\sum P_i ln P_i$$

где H'– индекс Шеннона-Уивера, $P_i = \frac{n_i}{N}$ соотношение числа видов выборки к общему числу всех видов. Верхний предел индекса $H' \leq 3.5$.

Результаты и обсуждения

В настоящее время термин биоразнообразие включает в себя сообщество видового разнообразия или те территории (биотопы), где дискретно распространяется жизнь на видовом уровне. Одним из современных подходов описания и оценки биоразнообразия является мониторинг, который в глобальном масштабе описывается двумя критериями: относительным обилием видового состава и видовым богатством. Параметры данных критерий оцениваются отдельно друг от друга, так как они не связаны между собой. Несмотря на это, оценка тех или иных параметров дает нам возможность понять состояние экосистемы на отдельных территориях и провести сравнение между ними.

В Таблице 1 приведены сравнительные данные фауны ООПТ РА. Из приведенных данных в Таблице видно, что по территориальности самым большим является национальный парк «Севан», второе место занимает национальный парк «Аревик», далее – «Дилижан», «Арпи лич», заповедники «Хосровский лес», затем «Шикахох» и, в конце, заповедник «Эребуни».

По количеству видового состава биоразнообразия самым богатым является национальный парк «Севан». Необходимо отметить, что численность видового состава достигается за счет орнитофауны, которая обитает на данной территории. Количество видов орнитофауны в национальном парке «Севан» почти в два раза больше, чем у других ООПТ.

По количеству видов фауны наиболее богаты также заповедники «Хосровский лес» и «Шикахох». Оба заповедника имеют почти тот же геоценоз и находятся на тех же высотах, хотя у заповедника «Хосровский

лес» территория почти в два раза больше, но что касается плотности ареала обитания животных, у заповедника «Шикахох» больше, чем у заповедника «Хосровский лес». Что касается заповедника «Эребуни», то здесь наблюдается наименьшее количество видов, что может объясняться меньшей территориальностью и особенностями ландшафтов. Однако, необходимо отметить, что именно на этой маленькой территории можно встретить 3 вида из 4 известных во всем мире дикой пшеницы.

Национальные парки «Севан» и «Дилижан» сравнимы между собой по количеству видов пресмыкающихся и амфибий. Что касается видов орнитофауны и млекопитающих, то по количеству видов орнитофауны в национальном парке Севан больше на 120 видов, а млекопитающих больше на 5 видов.

Необходимо отметить, что, к сожалению, национальный парк «Аревик» исследована еще не полностью и опубликованные данные можно считать неполноценными.

На основе Таблицы 1 были получены также процентные соотношения Краснокнижных видов фауны для всех исследуемых ООПТ. Результаты сравнительных данных приведены на Рис.1.

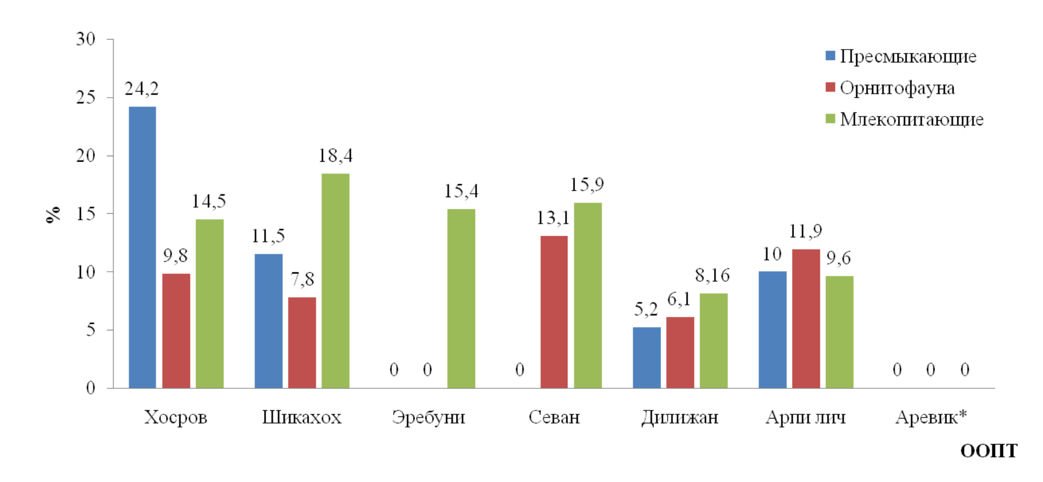


Рис.1. Процентное соотношение Краснокнижных видов фауны в ООПТ Армении (*– нет данных)

Полученные результаты свидетельствуют, что заповедник «Хосровский лес» является доминирующим по составу Краснокнижных видов пресмыкающих по сравнению с остальными ООПТ. Что касается орнитофауны, то наибольший процент приходится на долю национального парка «Севан». Из Рис.1 видно, что процентное соотношение орнитофауны национального парка «Арпи лич» сопоставимо с идентичными видами национального парка

«Севан». Со стороны видового состава млекопитающих, входящих в Красную книгу РА, самое высокое процентное соотношение имеет заповедник «Шикахох», а заповедники «Хосровский лес», «Эребуни» и национальный парк «Севан» сравнимы между собой. Те же показатели имеют также национальный парк «Дилижан» и «Арпи лич». Что касается амфибий, то необходимо отметить, что в ООПТ Армении отсутствуют Краснокнижные виды, о чем и свидетельствуют данные Таблицы 1.

Определение степени разнообразия видового состава в ООПТ является одним из основных параметров при проведении мониторинга. Он дает качественный анализ соотношения исследуемых обьектов при сравнении между собой. В Таблице 2 приведены результаты расчетов степени разнообразия видового состава фауны в исследуемых ООПТ Армении.

По данным таблицы 2 видно, что по степени разнообразия видового состава самым большим является национальный парк «Севан». Это можно интерпретировать большим количеством обитающих видов орнитофауны. Несмотря на разность индексов видового состава, заповедник «Хосровский лес» и национальный парк «Дилижан» по степени разнообразия видового состава сравнимы между собой, что касается заповедника «Шикахох», то он сравним по показателям с национальным парком «Арпи лич». Заповедник «Эребуни» является самым маленьким по разнообразию видового состава.

Таблица 2.

Степень разнообразия видового состава фауны ООПТ Армении

ООПТ	M	σ	CV%
Хосровский лес	58.75	3.21	5.43
Шикахох	52.25	2.97	5.62
Эребуни	20.75	1.15	5.55
Севан	83	4.54	5.46
Дилижан	55	3.01	5.47
Арпи лич	46.75	2.56	5.47
Аревик*	–	–	–

где M – среднеарифметический индекс видового состава по признаку (вид), σ – степень разнообразия видового состава, CV – коэффициент вариации видового состава.
(*– нет данных).

Необходимо отметить, что коэффициент вариации видового состава у всех исследуемых ООПТ сопоставимы между собой. Это означает, что признак изменчивости видового состава является стабильным и распределение

видов в экосиситеме ООПТ равномерен. Данное высказывание дает нам возможность констатировать, что ООПТ Армении в настоящее время являются теми резерватами, где видовой состав фауны имеют все возможности для дальнейшего развития. Принимая во внимание вышесказанное, нужно отметить, что необходимы определенные подходы и соответствующие меры для сохранения данных территории, что, к сожалению, не всегда производится.

Для всех исследуемых ООПТ были рассчитаны также индексы биоразнообразия по рангам, результаты которого приведены в Таблице 3.

Из таблицы 3 видно, что среднее значение индекса биоразнообразия в заповедниках близки по значению и сопоставимы между собой. Такие же результаты получены и для национальных парков. Это можно объяснить тем, что заповедники менее подвержены антропогенному фактору по сравнению с национальными парками. Степень неопределенности встретить какой-либо вид в заповедниках на порядок выше.

Таблица 3.

Значение индекса биоразнообразия (Шеннона-Уивера) для ООПТ Армении

ООПТ	**Пресмыкающие (вид)**	**Амфибии (вид)**	**Орнитофауна (вид)**	**Млекопитающие (вид)**	**Среднее Значение**
Хосровский лес	2.73	0.88	3.06	3.35	2,5
Шикахох	2.51	0.39	2.68	3.07	2,1
Эребуни	3.28	0.18	3.06	2.83	2,3
Севан	1.47	0.46	1.76	2.65	1,5
Дилижан	2.10	0.78	2.70	1.10	1,6
Арпи лич	1.48	0.46	2.05	2.88	1,7
Аревик*	–	–	–	–	–

(*– нет данных)

Заключение

Проведенный сравнительный анализ показал, что по коэффициенту Шеннона-Уивера исследуемые заповедники в среднем по видам биоразнообразия сопостовимы между собой, это можно объяснить тем, что данные территории наиболее строго охраняемы. В свою очередь исследуемые национальные парки также близки по значению. Это также объясняется большой антропогенной нагрузкой на данные территории.

Отсутствие полноценных данных национального парка «Аревик» затрудняет оценить возможности и наличие биоразнообразия в данном национальном парке. Отсутствие данных объясняется тем, что пока еще не обозна-

чены территориальные границы и, соответственно, не проведен мониторинг в данном национальном парке.

Полученные результаты по уравнению «сигма» показывают, что по степени разнообразия видового состава фауны исследуемых ООПТ наиболее высокую степень располагает национальный парк «Севан», а наиболее низкую степень – заповедник «Эребуни». Что касается значений индекса биоразнообразия, то необходимо отметить, что наибольшее количество видов наблюдается в заповеднике «Хосровский лес», а наименьшее количество – в национальном парке «Севан».

По результатам Краснокнижных видов заповедник «Хосровский лес» по составу пресмыкающих также является доминантным, что нельзя сказать о видах орнитофауны и млекопитающих. Здесь высокую процентность по орнитофауне имеет национальный парк «Севан», а по видам млекопитающих – заповедник «Шикахох».

Из проведенных исследований видно, что необходимо регулярно проводить мониторинг состояния ООПТ, мониторинг биоразнообразия ООПТ, а также проводить научно-исследовательские работы различных направлений с целью сохранения данных территорий и периодического обновления данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. http://oopt. info/.
2. Министерство охраны природы РА. Национальный доклад «О состоянии окружающей среды Армении»// Ер., 2002. С. 49.
3. *Խանջյան Ն.* «Խոսրովի Անտառ» արգելոց // 2009, Եր.: «Վարդ հրատ» ՍՊԸ, 98 էջ:
4. http://www.sevanpark.am
5. *Ханджян Н.* и *Шарбатян М.* Флора Дилижанского заповедника. 1999, Ер.: «Амарас», 102 с.
6. *Աղասյան Լ.* «Արփի լիճ» ազգային պարկ կենսաբազմազանության պահպանությունը: Ընդհանուր տեղեկություններ: 2012, Երևան//«ԱՍՈՂԻԿ», 35 էջ:
7. *Makichyan G.* Comparative analysis of biodiversity of especially protected natural areas of Armenia. Известия Национального Аграрного университета Армении, 4, 2014. СС. 26–27.
8. *Алексевнина М.С., Батарова Н.А., Бойко Т.А.* и др. Методы математической статистики в учебном эколого-биологическом исследовании // Учебный курс ГОУ ДОД «Краевой эколого-биологический центр», Пермь, 2008, 114 с.
9. *MacArthur R.H.* Fluctuation of animal populations and measure of community stability // Ecology. 1955. V. 36, № 3. PP. 533–536.
10. *Лакин Г.Ф.* Биометрия. М., 1990, 352 с.

11. *Shannon C.E.* The mathematical theory of communication // Bell Syst. Techn. J. 1948.V. 27. PP. 379–423.

12. *Shannon C.E., Weaver W.* The Mathematical Theory of Communication. Urbana: Univ. Illinois Press, 1949. 117 p.

COMPARATIVE ANALYSIS OF FAUNA IN ARMENIA'S PROTECTED AREAS

G. Makichyan

SUMMARY

One of the global challenges of our time is the preservation of biodiversity - the diversity of animal and plant species, ecosystems and landscapes. The conservation of biodiversity is not a new direction of nature protection, but is an integral part of the concept of mankind's transition to principles of sustainability. The basic methods of saving biological diversity of our planet are protected areas (PAs), and monitoring, analysis and comparison are the assessments of the state of biodiversity.
Keywords: biodiversity, national park, reservation park, PA.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԲՆԱԿԱՆ ՀԱՏՈՒԿ ՊԱՀՊԱՆՎՈՂ ՏԱՐԱԾՔՆԵՐԻ ՖԱՈՒՆԱՅԻ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Գ.Տ.Մակիչյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկայումս կենսաբազմազանության պահպանումը հանդիսանում է կարևորագույն հիմնախնդիրներից մեկը: Այն համարվում է բնապահպանական հիմնարար սկզբունքներից մեկը և միտված է ապահովելու մարդու բնականոն զարգացումը: Հայտնի է, որ բնական հատուկ պահպանվող տարածքները (ԲՀՊՏ) առավելապես նպաստում են կենսաբազմազանության պահպանմանը, իսկ առկա վիճակի գնահատման հիմնական գործառույթներից է մոնիթորինգը և նրա արդյունքում ձեռք բերված տվյալների վերլուծությունն ու համեմատությունը**:**
Հիմնաբառեր՝ կենսաբազմազանություն, ազգային պարկ, արգելոց, ԲՀՊՏ:

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Г.О. Акопян – аспирант Национального политехнического университета РА

Д.Г. Асатрян – д.т.н., проф., гл. специалист Департамента науки Российско-Армянского (Славянского) университета

Г. Багунц – к.ф-м.н., доцент Арцахского государственного университета

Г. Габриелян – аспирант Арцахского государственного университета

В.Г. Гараков – к.ф-м.н., старший научный сотрудник института механики НАН РА

А.К. Кроян – ассистент кафедры Высшей математики Армянского Национального Аграрного университета

Г.Т. Макичян – соискатель кафедры Медицинской биохимии и биотехнологии Российско-Армянского (Славянского) университета

А.А. Мкртчян – к.т.н., ассистент-профессор факультета Инженерии и естественных наук Американского университета Армении

С.М. Овсепян – аспирант кафедры Системного программирования Российско-Армянского (Славянского) университета

Л.С. Петросян – к.ф.-м.н.,заведующий кафедрой Медицинской физики Ереванский Государственного Медицинского университета им. М. Гераци, доцент кафедры Общей физики и квантовых наноструктур Российско-Армянского (Славянского) университета

Т.Г. Сардарян – аспирант Института математики НАН Армении

А.А. Туманян – соискатель, младший научный сотрудник Института физиологии им. Л. Орбели НАН РА

Х.А. Хачатрян – д.ф-м.н., старший научный сотрудник Института математики НАН РА

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Правила для авторов журнала «Вестник РАУ, Физико-математические и естественные науки».

Журнал печатает оригинальные статьи по различным направлениям физико-математических и естественных наук.

• К рассмотрению принимаются статьи на русском, армянском или английском языках.

• Статьи должны быть представлены в распечатанном виде и электронной форме.

• К материалам статьи прилагается Договор с издательством РАУ, подписанный одним (ответственным) автором (оформляется в одном экземпляре).

• Статья должна иметь направление от учреждения, в котором выполнена работа. Рукопись подписывается автором (соавторами) с указанием фамилии, имени, отчества, домашнего адреса, места работы, номеров телефонов и e-mail. Необходимо указать, с кем вести переговоры и переписку. Отклоненные статьи не возвращаются.

• В редакцию направляются два экземпляра статьи, набранные шрифтом 12 пунктов через 1.5 интервала на одной стороне листа. Рукописные вставки не допускаются. Все страницы должны быть пронумерованы.

Перед текстом статьи указываются:

– название статьи;

– инициалы и фамилии авторов (для иностранных авторов на языке оригинала или на английском языке);

– название учреждения (без сокращений и аббревиатур), которое направляет статью, его адрес (город, страна);

– e-mail авторов.

Далее помещается аннотация на языке оригинала объемом не более 0.5 машинописной страницы, которая не должна дублировать вводный или заключительный разделы. Аннотация не должна содержать литературных ссылок и аббревиатур. В конце аннотации указываются ключевые слова (keywords). В конце статьи помещаются аннотации на двух из оставшихся языках

• Изложение материала должно быть ясным и кратким, без формул и выкладок промежуточного характера и громоздких математических выражений.

• Рисунки, помещенные в текте статьи, должны быть достаточно яркими и контрастными, чтобы сохранилось их качество при тиражировании журнала. Подрисуночный текст обязателен и должен быть набран курсивом.

• Формулы следует набирать курсивом, крупно, свободно и четко (набор математических формул рекомендуется выполнить при помощи системы Mathtype). Нумерация формул должна быть сквозной по всей статье (не по разделам).

– Жирным шрифтом набираются только векторные величины (стрелка сверху не нужна).

– Химические формулы, символы, сокращения, единицы измерения набираются прямым шрифтом.

• Таблицы должны быть включены в общую нумерацию текста. Обязательно наличие заголовков и единиц измерения величин. Все столбцы таблицы должны быть озаглавлены.

• Список литературы должен быть набран на языке цитированной литературы и оформлен следующим образом:

– для книг – инициалы и фамилии *всех* авторов, название книги, издательство, место издания, год издания в круглых скобках, том;

– для периодических изданий – инициалы и фамилии всех авторов, название журнала, том, – номера первой и последней страниц статьи, год издания в круглых скобках.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Математика и информатика

Физика

Биология

Экология

Адрес Редакции научных изданий Российско-Армянского
(Славянского) университета:
0051, г. Ереван, ул. Овсепа Эмина, 123
тел./факс: (+374 10) 27-70-52, (внутр. 42-02)
e-mail: marvolskraya@gmail.com

Заказ № 16
Подписано к печати 19.09.2015г.
Формат 70x100$^{1}/_{16}$. Бумага офсетная №1.
Объем 7.68 усл. п.л. Тираж 100 экз.